

## Uvod u funkcije - jednostavnije

U 7. razredu uvodimo pojam funkcije. U skladu s novim programom (HNOS, 2006.g.), u redovnoj nastavi više ne spominjemo pojam domene i kodomene, budući da je ovdje naglasak na linearnoj funkciji koja je definirana za sve brojeve (na cijelom skupu  $\mathbb{R}$ , odnosno za naše sedmaše na  $\mathbb{Q}$  (oni još nisu upoznali realne brojeve)). Stoga sam napravila dvije varijante prezentacije o funkcijama:

- jednostavniju - u kojoj se ne spominju domena i kodomena, dakle ona je pogodna za korištenje u skladu s programom,
- složeniju - u kojoj se pojašnjavaju i domena i kodomena, dakle ona je pogodna za samoučenje za one učenike koji žele i to naučiti, ili pak za korištenje u srednjoj školi, kad se uvode i ti pojmovi.

Na satu možemo prvo, kao uvod u ovu cjelinu, odnosno **općenito u funkcije** pomoću projektora, prikazati jednostavniju varijantu prezentacije, s učenicima komentirati njezine dijelove i tako se upoznati s novim pojmovima i simboličkim zapisom, a zatim krenemo na zapis u bilježnice. Prilikom zapisivanja u bilježnice, što više treba aktivirati učenike - u skladu s onim što želimo zapisati treba im postavljati odgovarajuća pitanja, te iz odgovora (koje bi oni trebali znati, nakon što smo prošli prezentaciju) i naših daljnjih potpitanja doći do onoga što će se zapisati...

Jedna od mogućnosti što zapisati u bilježnice, prikazana je o ovom materijalu.

Na kraju ovog materijala (na zadnje dvije stranice) su zadaci za zadaću. Možete ih umnožiti i podijeliti učenicima. Uz primjere i zadatke predviđene za rješavanje na satu nalaze se i oznake koji im od zadataka za zadaću odgovaraju. Npr. oznaka "DZ P-4a" znači da za zadaću s papira treba riješiti 4.a zadatak.

Nakon što se upoznamo općenito s pojmom funkcije, krenut ćemo na **linearne** funkcije...

Antonija Horvatek

*Matematika na dlanu*

<http://www.antonija-horvatek.from.hr/>

## Funkcije

Funkcija je pravilo po kojem se svakom elementu jednog skupa pridružuje točno jedan element drugog (ili tog istog) skupa.

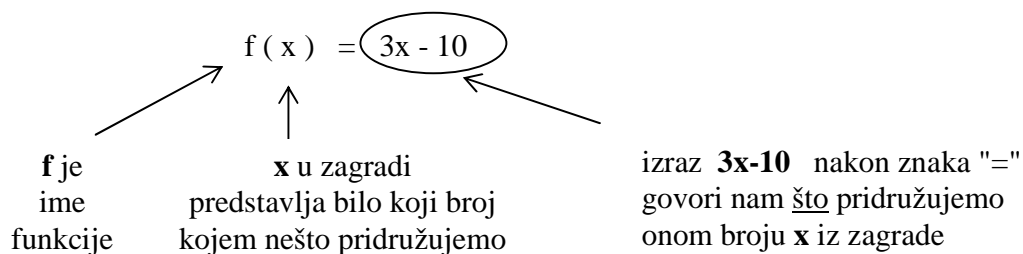
U ovoj cjelini proučavat ćemo funkcije koje brojevima pridružuju brojeve.

Primjer 1.: Zadana je funkcija:

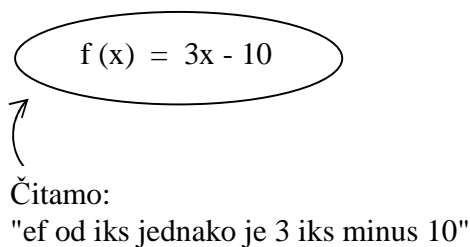
$$f(x) = 3x - 10$$

a) Objasnimo taj zapis:

Zadani zapis opisuje pravilo pridruživanja funkcije  $f$  :



b) Kako to čitamo?



c) Izračunajmo što ta funkcija pridružuje brojevima -4, 0, 2 i 6 !

Ono što funkcija  $f$  pridružuje broju -4, označavamo sa  $f(-4)$ .

Dakle, trebamo izračunati  $f(-4)$ ,  $f(0)$ ,  $f(2)$  i  $f(6)$ . Pri tom računanju koristimo zadano pravilo pridruživanja:

$$f(x) = 3x - 10$$

Da bismo izračunali  $f(-4)$ , u to pravilo umjesto  $x$  uvrstimo -4.

$$f(-4) = 3 \cdot (-4) - 10$$

$$f(-4) = -12 - 10$$

$$\boxed{f(-4) = -22}$$

$f(-4) = -22$  ← čitamo: ef od -4 jednako je -22



to znači da funkcija  $f$  broju -4  
pridružuje broj -22

Da bismo izračunali  $f(0)$ , u pravilo pridruživanja umjesto  $x$  uvrstimo 0:

$$f(0) = 3 \cdot 0 - 10$$

$$f(0) = 0 - 10$$

$$\boxed{f(0) = -10}$$

**DZ** P - 1



sa papira

1. zadatak

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 10$$

$$f(2) = 6 - 10$$

$$\boxed{f(2) = -4}$$

$$f(6) = 3 \cdot 6 - 10$$

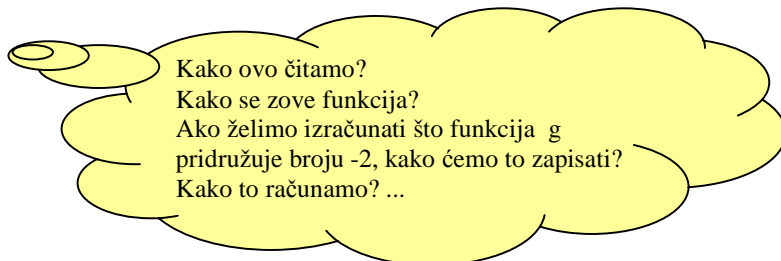
$$f(6) = 18 - 10$$

$$\boxed{f(6) = 8}$$

Primjer 2.:

a) Izračunaj koje vrijednosti funkcija  $g$  pridružuje brojevima  $-2, -1, 0$  i  $1$  ako je ona zadana sa:

$$g(x) = 2x + 1$$



Rješenja:

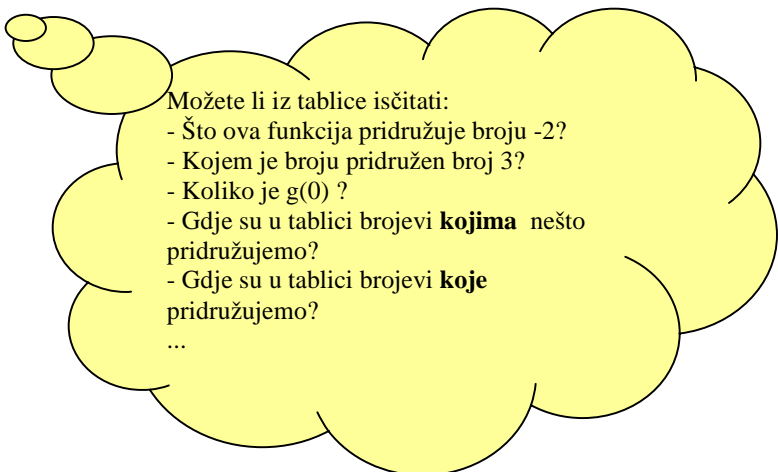
$$\begin{array}{llll} g(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 & g(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 & g(0) = 2 \cdot 0 + 1 & g(1) = 2 \cdot 1 + 1 \\ g(-2) = -4 + 1 & g(-1) = -2 + 1 & g(0) = 0 + 1 & g(1) = 2 + 1 \\ \boxed{g(-2) = -3} & \boxed{g(-1) = -1} & \boxed{g(0) = 1} & \boxed{g(1) = 3} \end{array}$$

b) Tablično prikaži tražene vrijednosti koje poprima funkcija  $g$  (koristi rješenja iz a primjera):

Tablični prikaz:

$x$	$-2$	$-1$	$0$	$1$
$y = g(x) = 2x+1$	$-3$	$-1$	$1$	$3$

**DZ** P - 2



$x, y$  - varijable

$x$  - nezavisna varijabla (bilo koji broj za kojeg računamo što mu se pridružuje)  
- argument

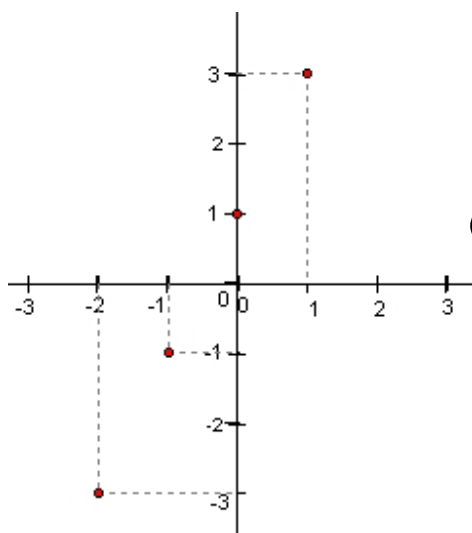
$y$  - zavisna varijabla (zavisni o  $x$ , računamo  $y$  koji pripada tj. pridružen je nekom  $x$ -u)  
- vrijednost funkcije

c) Grafički prikaži izračunata pridruživanja koja vrši funkcija  $g$  (koristi rješenja iz b primjera):

Iz tablice u b primjeru vidimo da je za  $x=-2$  pripadni  $y=-3$ , pa imamo par  $(-2, -3)$ .

Slično tome, iz tablice isčitavamo parove  $(-1, -1)$ ,  $(0, 1)$  i  $(1, 3)$ .

Te točke nađemo u koordinatnom sustavu i one prikazuju pridruživanja funkcije  $g$ .

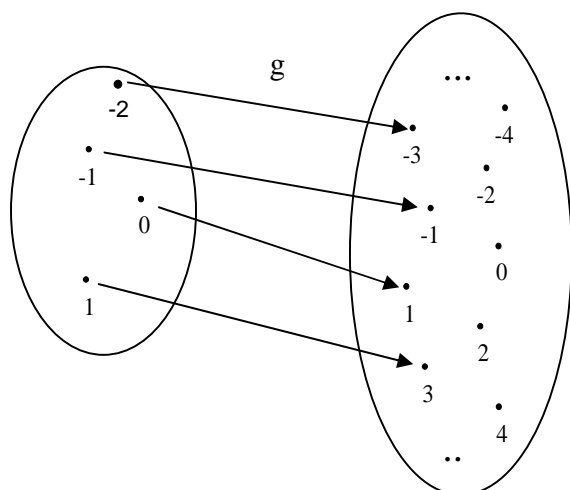


Možete li iz ovog grafičkog prikaza isčitati:

- Što ova funkcija pridružuje broju 1?
- Kojem je broju pridružen broj -3?
- Koliko je  $g(-1)$ ?
- Otkud isčitavamo brojeve **kojima** nešto pridružujemo?
- Gdje su brojevi **koje** pridružujemo?
- ...

**DZ** P - 3

d) Slikovni prikaz:



Možete li i iz ovog prikaza isčitati:

- Što ova funkcija pridružuje broju 0?
- Kojem je broju pridružen broj 3?
- Koliko je  $g(-1)$ ?
- ...

1.) Izračunaj vrijednosti sljedećih funkcija za zadane vrijednosti argumenta x:

a)  $f(x) = 3x$   
za  $x = -5, -3, -1, 2, 4$

Rješenja:

$$f(-5) = 3 \cdot (-5)$$
$$\boxed{f(-5) = -15}$$

$$f(-3) = 3 \cdot (-3)$$
$$\boxed{f(-3) = -9}$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)$$
$$\boxed{f(-1) = -3}$$

**DZ** P - 4a

$$f(2) = 3 \cdot 2$$
$$\boxed{f(2) = 6}$$

$$f(4) = 3 \cdot 4$$
$$\boxed{f(4) = 12}$$

b)  $g(x) = -x + 10$   
za  $x = 1, -3, 0, 2, -7$

Kako u "-x" uvrštavamo pozitivne, a kako negativne brojeve?...

Rješenja:

$$g(1) = -1 + 10$$
$$\boxed{g(1) = 9}$$

$$g(-3) = -(-3) + 10$$
$$g(-3) = 3 + 10$$
$$\boxed{g(-3) = 13}$$

$$g(0) = -0 + 10$$
$$g(0) = 0 + 10$$
$$\boxed{g(0) = 10}$$

**DZ** P - 4b,c

$$g(2) = -2 + 10$$
$$\boxed{g(2) = 8}$$

$$g(-7) = -(-7) + 10$$
$$g(-7) = 7 + 10$$
$$\boxed{g(-7) = 17}$$

c)  $f(x) = -3x - 7$   
za  $x = -5, -2, 0, 1, 8$

Rješenja:

$$f(-5) = -3 \cdot (-5) - 7$$
$$f(-5) = 15 - 7$$
$$\boxed{f(-5) = 8}$$

$$f(-2) = -3 \cdot (-2) - 7$$
$$f(-2) = 6 - 7$$
$$\boxed{f(-2) = -1}$$

$$f(0) = -3 \cdot 0 - 7$$
$$f(0) = 0 - 7$$
$$\boxed{f(0) = -7}$$

**DZ** P - 4d

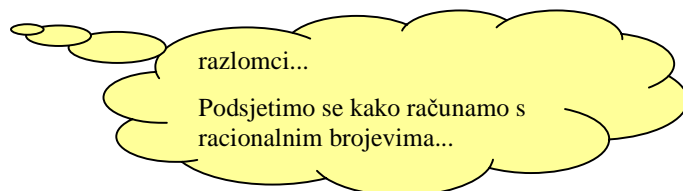
$$f(1) = -3 \cdot 1 - 7$$
$$f(1) = -3 - 7$$
$$\boxed{f(1) = -10}$$

$$f(8) = -3 \cdot 8 - 7$$
$$f(8) = -24 - 7$$
$$\boxed{f(8) = -31}$$

2.) Izračunaj vrijednosti koje poprima funkcija  $f$  za zadane  $x$ :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

$$\text{za } x = \frac{-3}{4}, 0, \frac{1}{2}, 2$$



Rješenja:

$$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) - \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{8} - \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3-2}{8}$$

$$\boxed{f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-5}{8}}$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 0 - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{f(0) = \frac{-1}{4}}$$

**DZ** P - 5

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4}$$

$$f(2) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{f(2) = \frac{3}{4}}$$

3.) Dopuni tablicu:

a)  $f(x) = x \cdot x - 3x - 6$

Kako uvrstiti u  $x \cdot x \dots ? \dots$

x	-5	-1	1	10
$y = f(x) = x \cdot x - 3x - 6$				

Rješenja:

$$f(-5) = -5 \cdot (-5) - 3 \cdot (-5) - 6$$

$$f(-5) = 25 + 15 - 6$$

$$f(-5) = 40 - 6$$

$$\boxed{f(-5) = 34}$$

$$f(-1) = -1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) - 6$$

$$f(-1) = 1 + 3 - 6$$

$$f(-1) = 4 - 6$$

$$\boxed{f(-1) = -2}$$

DZ P - 6a

$$f(1) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 6$$

$$f(1) = 1 - 3 - 6$$

$$f(1) = 1 - 9$$

$$\boxed{f(1) = -8}$$

$$f(10) = 10 \cdot 10 - 3 \cdot 10 - 6$$

$$f(10) = 100 - 30 - 6$$

$$f(10) = 100 - 36$$

$$\boxed{f(10) = 64}$$

x	-5	-1	1	10
$y = f(x) = x \cdot x - 3x - 6$	34	-2	-8	64

b)  $h(x) = \frac{3}{x} - x$

Kako uvrstiti u  $\frac{3}{x} \dots ?$   
 Što ćemo s minusom u nazivniku?  
 Prisjetimo se raznih pravila...

x	-2	-1	1	3
$y = h(x) = \frac{3}{x} - x$				

DZ P - 6b

Rješenja:

$$h(-2) = \frac{3}{-2} - (-2)$$

$$h(-2) = \frac{-3}{2} + 2$$

$$h(-2) = \frac{-3+4}{2}$$

$$\boxed{h(-2) = \frac{1}{2}}$$

$$h(-1) = \frac{3}{-1} - (-1)$$

$$h(-1) = -3 + 1$$

$$\boxed{h(-1) = -2}$$



$$h(1) = \frac{3}{1} - 1$$

$$h(1) = 3 - 1$$

$$\boxed{h(1) = 2}$$

$$h(3) = \frac{3}{3} - 3$$

$$h(3) = 1 - 3$$

$$\boxed{h(3) = -2}$$

x	-2	-1	1	3
$y = h(x) = \frac{3}{x} - x$	$\frac{1}{2}$	-2	2	-2

Za rezervu (ako zatreba):

4.) Izračunaj sve vrijednosti koje poprima funkcija  $g$  za navedene vrijednosti argumenta  $x$ :

$$g(x) = -4x - 6$$

za  $x = -6, -1, 0, 1$

Rješenja:

$$g(-6) = -4 \cdot (-6) - 10$$

$$g(-6) = 24 - 10$$

$$\boxed{g(-6) = 14}$$

$$g(-1) = -4 \cdot (-1) - 10$$

$$g(-1) = 4 - 10$$

$$\boxed{g(-1) = -6}$$

$$g(0) = -4 \cdot 0 - 10$$

$$g(0) = 0 - 10$$

$$\boxed{g(0) = -10}$$

$$g(1) = -4 \cdot 1 - 10$$

$$g(1) = -4 - 10$$

$$\boxed{g(1) = -14}$$

5.) Izračunaj sve vrijednosti koje poprima funkcija  $g$  za zadane  $x$ :

$$h(x) = -x + 40$$

za  $x = -300, -10, 15, 80$

Rješenja:

$$g(-300) = -(-300) + 40$$

$$g(-300) = 300 + 40$$

$$\boxed{g(-300) = 340}$$

$$g(-10) = -(-10) + 40$$

$$g(-10) = 10 + 40$$

$$\boxed{g(-10) = 50}$$

$$g(15) = -15 + 40$$

$$\boxed{g(15) = 25}$$

$$g(80) = -80 + 40$$

$$\boxed{g(80) = -40}$$

## Zadaci za zadaću

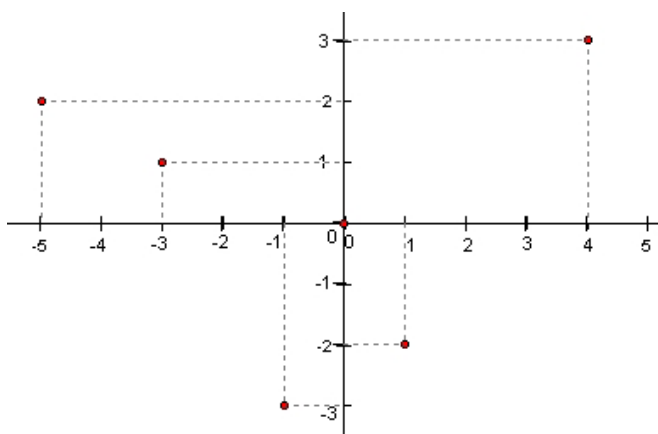
- 1.) a) Kako čitamo zapis  $g(x) = -3x + 1$  ?  
b) Kako čitamo zapis  $f(-8) = 42$  ?  
c) Što nam govori zapis  $f(-8) = 42$  ?

2.) Sljedeća je funkcija zadana tablično:

x	-3	-1	2	4
y = f(x)	-4	-3	-1	3

- a) Kako se zove funkcija?  
b) Za koje je brojeve prikazano što im je pridruženo?  
c) Koji su brojevi pridruženi?  
d) Prepiši i dopuni:  $f(2) = \underline{\quad}$  i  $f(-3) = \underline{\quad}$   
e) Kojem je broju pridružen broj -3 ?  
f) Grafički prikaži tu funkciju!

3.) Sljedeća funkcija zadana je grafički:



- a) Napiši čemu je jednako  $f(-5)$ ,  $f(-3)$  ... (za sve vrijednosti za koje je prikazano...)  
b) Pomoću tablice prikaži pridruživanje te funkcije!  
c) Slikovno prikaži tu funkciju!

4.) Izračunaj koje vrijednosti poprima funkcija za zadane vrijednosti argumenta x:

a)  $f(x) = -4x$   
za  $x = -3, 0, 6$

b)  $f(x) = x - 7$   
za  $x = -1, 0, 2, 10$

c)  $g(x) = -x - 8$   
za  $x = 8, -8, 3, -7, -50$

d)  $h(x) = -4x + 5$   
za  $x = -7, -1, 0, 1, 6$

5.) Izračunaj koje vrijednosti poprima funkcija f za zadane x:

$$f(x) = -x - \frac{1}{4}$$

za  $x = \frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2$

6.) Dopuni tablicu:

a)  $f(x) = 2 \cdot x \cdot x - 5x$

x	-2	0	1	2	5
$y = f(x) = 2 \cdot x \cdot x - 5x$					

b)  $h(x) = 2x - \frac{6}{x}$

x	-6	-3	-1	1	3
$y = h(x) = 2x - \frac{6}{x}$					