

Funkcije

U 7. razredu uvodimo pojam funkcije. U skladu s novim programom, u redovnoj nastavi više ne spominjemo pojam domene i kodomene, pošto je u njoj naglasak na linearnoj funkciji koja je definirana za sve (realne, pa i racionalne) brojeve. Stoga ovaj materijal (u kojem se objašnjavaju i domena i kodomena te simbolički zapisi vezani uz njih) možete iskoristiti eventualno na dodatnoj ili izornoj nastavi. Ili možda u srednjoj školi.

Jedna moguća primjena ovog materijala u nastavi je da za uvod pomoću projektora prikazemo pripadnu prezentaciju, s učenicima komentiramo njezine dijelove i tako se upoznamo s novim pojmovima i simboličkim zapisom, a zatim krenemo na zapis u bilježnice. Prilikom zapisivanja u bilježnice, što više treba aktivirati učenike - u skladu s onim što želimo zapisati treba im postavljati odgovarajuća pitanja, te iz odgovora (koje bi oni trebali znati, nakon što smo prošli prezentaciju) i naših daljnjih potpitanja doći do onoga što će se zapisati...

Jedna od mogućnosti što zapisati u bilježnice, prikazana je o ovom materijalu.

Na kraju ovog materijala (na zadnje dvije stranice) su zadaci za zadaću. Možete ih umnožiti i podijeliti učenicima. Uz primjere i zadatke predviđene za rješavanje na satu nalaze se i oznake koji im od zadataka za zadaću odgovaraju. Npr. oznaka "DZ P-4a" znači da za zadaću s papira treba riješiti 4.a zadatak.

Za uvođenje pojma funkcije na redovnoj nastavi preporučam korištenje jednostavnije prezentacije "1-Funkcije-**jednostavnije**.ppt" koju također možete naći na mojim web stranicama.

Antonija Horvatek
Matematika na dlanu
<http://www.antonija-horvatek.from.hr/>

Funkcije

Funkcija iz skupa D u skup K je pravilo po kojem se svakom elementu skupa D pridružuje točno jedan element skupa K.

Skup D nazivamo DOMENA.

Skup K nazivamo KODOMENA.

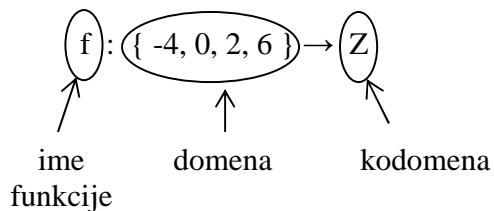
Primjer 1.: Zadana je funkcija:

$$f : \{ -4, 0, 2, 6 \} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$f(x) = 3x - 10$$

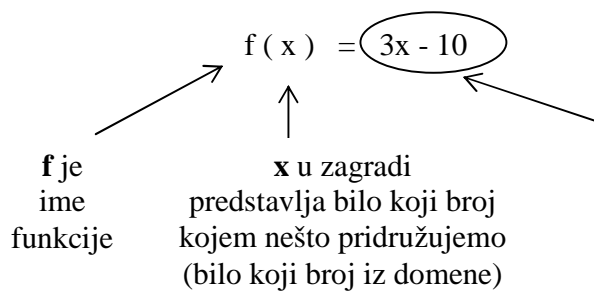
a) Objasnimo ta dva retka:

U 1. retku piše nam ime funkcije, domena i kodomena.



Dakle, funkcija f svakom od brojeva $-4, 0, 2, 6$ pridružuje točno jedan cijeli broj (iz skupa \mathbb{Z}).

U 2. retku je pravilo pridruživanja.

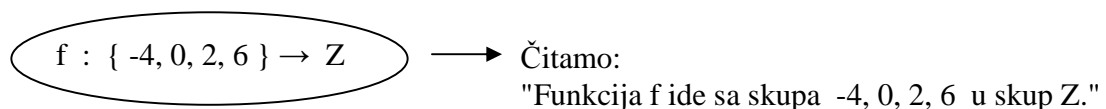


DZ P - 1

sa papira

1. zadatak

b) Kako čitamo ta dva retka?



$$f(x) = 3x - 10$$



Čitamo:

"ef od iks jednako je 3 iks minus 10"

c) Izračunajmo što ta funkcija pridružuje elementima domene!

U 1. retku vidimo da su u domeni brojevi $-4, 0, 2$ i 6 , pa trebamo izračunati što funkcija njima pridružuje.

Ono što funkcija pridružuje broju -4 , označavamo sa $f(-4)$.

Dakle, trebamo izračunati $f(-4)$, $f(0)$, $f(2)$ i $f(6)$. Pri tom računanju koristimo zadano pravilo pridruživanja iz 2. retka:

$$f(x) = 3x - 10$$

Da bismo izračunali $f(-4)$, u to pravilo umjesto x uvrstimo -4 .

$$f(-4) = 3 \cdot (-4) - 10$$

$$f(-4) = -12 - 10$$

$$f(-4) = -22$$

$$f(-4) = -22 \leftarrow \text{čitamo: ef od } -4 \text{ jednako je } -22$$



to znači da funkcija f broju -4 pridružuje broj -22

Da bismo izračunali $f(0)$, umjesto x uvrstimo 0 :

$$f(0) = 3 \cdot 0 - 10$$

$$f(0) = 0 - 10$$

$$f(0) = -10$$

DZ P - 2

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 10$$

$$f(2) = 6 - 10$$

$$f(2) = -4$$

$$f(6) = 3 \cdot 6 - 10$$

$$f(6) = 18 - 10$$

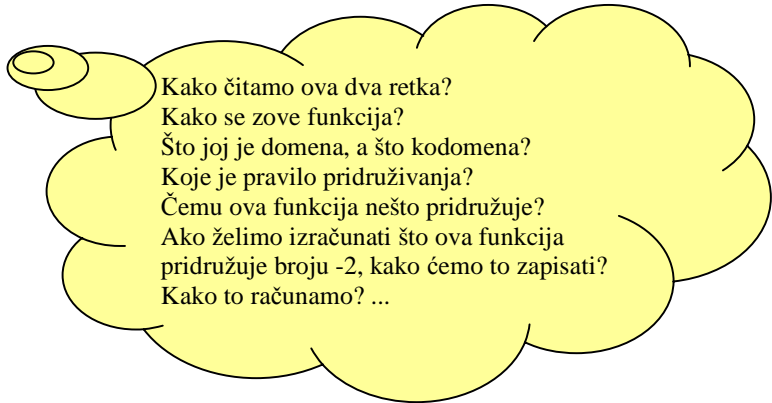
$$f(6) = 8$$

Primjer 2.:

a) Izračunaj sve vrijednosti koje poprima funkcija g:

$$g : \{ -2, -1, 0, 1 \} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$g(x) = 2x + 1$$



Rješenja:

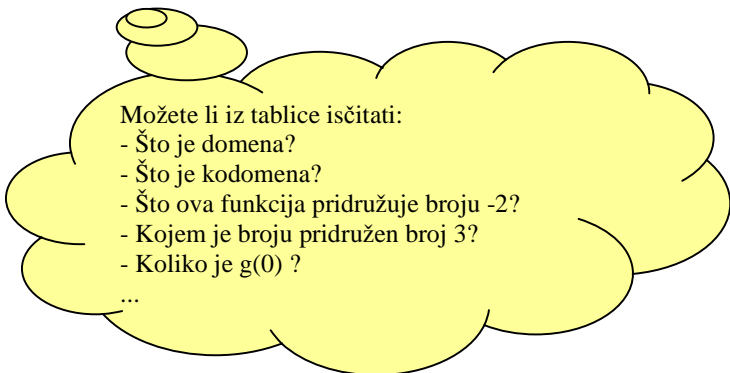
$g(-2) = 2 \cdot (-2) + 1$	$g(-1) = 2 \cdot (-1) + 1$	$g(0) = 2 \cdot 0 + 1$	$g(1) = 2 \cdot 1 + 1$
$g(-2) = -4 + 1$	$g(-1) = -2 + 1$	$g(0) = 0 + 1$	$g(1) = 2 + 1$
$g(-2) = -3$	$g(-1) = -1$	$g(0) = 1$	$g(1) = 3$

b) Tablično prikaži sve vrijednosti koje poprima funkcija g (koristi rješenja iz a primjera):

Tablični prikaz:

x	-2	-1	0	1
y = g(x) = 2x+1	-3	-1	1	3

DZ P - 3



x, y - varijable

x - nezavisna varijabla (bilo koji broj iz domene)
 - argument

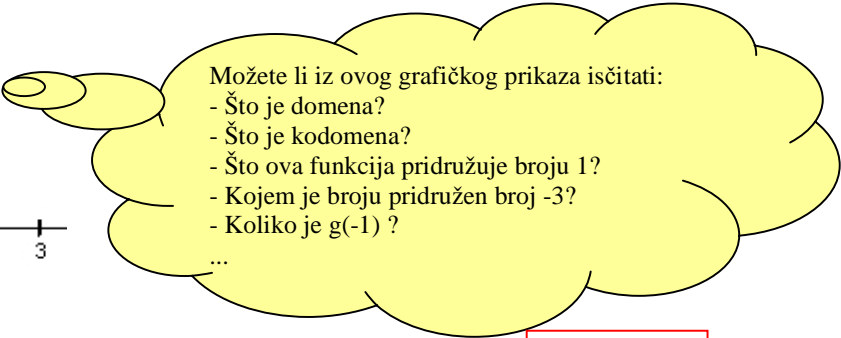
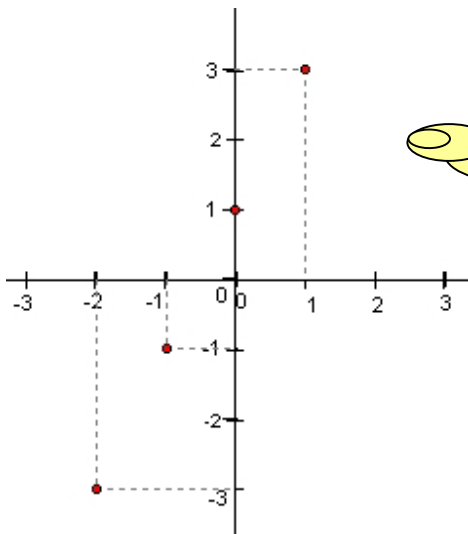
y - zavisna varijabla (ovisi o x, računamo y koji pripada nekom x-u)

c) Grafički prikaži koja pridruživanja vrši funkcija g (koristi rješenja iz b primjera):

Iz tablice u b primjeru vidimo da je za $x=-2$ pripadni $y=-3$, pa imamo par $(-2, -3)$.

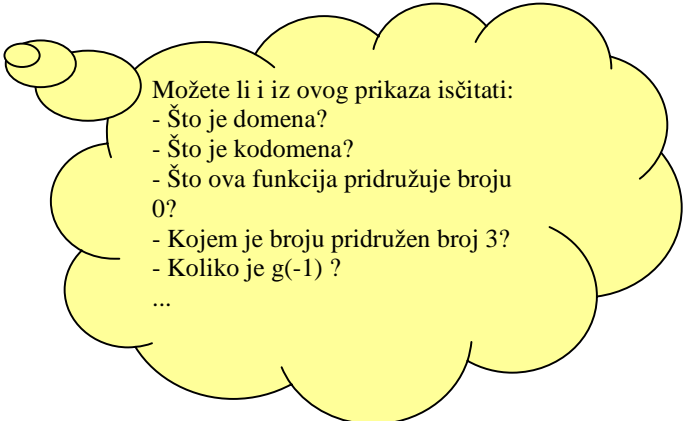
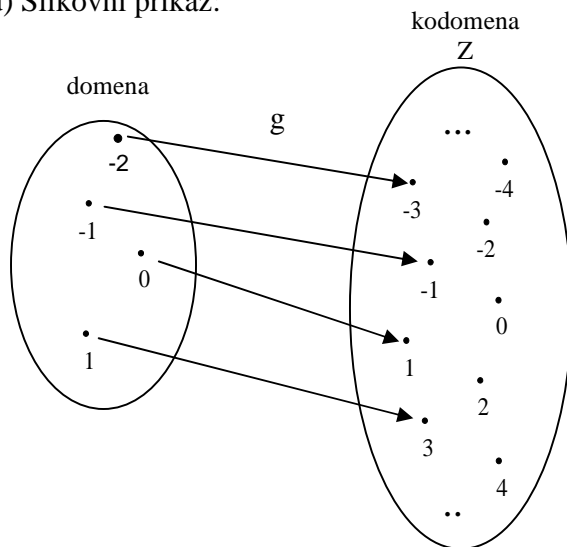
Slično tome, iz tablice isčitavamo parove $(-1, -1)$, $(0, 1)$ i $(1, 3)$.

Te točke nađemo u koordinatnom sustavu i one pokazuju pridruživanja funkcije g .



DZ P - 4

d) Slikovni prikaz:



1.) Izračunaj vrijednosti sljedećih funkcija za sve vrijednosti argumenta x:

a) $f : \{ -5, -3, -1, 2, 4 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = 3x$$

Rješenja:

$$\begin{aligned} f(-5) &= 3 \cdot (-5) \\ f(-5) &= -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-3) &= 3 \cdot (-3) \\ f(-3) &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3 \cdot (-1) \\ f(-1) &= -3 \end{aligned}$$

DZ P - 5a

$$\begin{aligned} f(2) &= 3 \cdot 2 \\ f(2) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= 3 \cdot 4 \\ f(4) &= 12 \end{aligned}$$

b) $g : \{ 1, -3, 0, 2, -7 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$g(x) = -x + 10$$

Kako u "-x" uvrštavamo pozitivne, a kako negativne brojeve?...

Rješenja:

$$\begin{aligned} g(1) &= -1 + 10 \\ g(1) &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-3) &= -(-3) + 10 \\ g(-3) &= 3 + 10 \\ g(-3) &= 13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0) &= -0 + 10 \\ g(0) &= 0 + 10 \\ g(0) &= 10 \end{aligned}$$

DZ P - 5b,c

$$\begin{aligned} g(2) &= -2 + 10 \\ g(2) &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(-7) &= -(-7) + 10 \\ g(-7) &= 7 + 10 \\ g(-7) &= 17 \end{aligned}$$

c) $f : \{ -5, -2, 0, 1, 8 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = -3x - 7$$

Rješenja:

$$\begin{aligned} f(-5) &= -3 \cdot (-5) - 7 \\ f(-5) &= 15 - 7 \\ f(-5) &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= -3 \cdot (-2) - 7 \\ f(-2) &= 6 - 7 \\ f(-2) &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= -3 \cdot 0 - 7 \\ f(0) &= 0 - 7 \\ f(0) &= -7 \end{aligned}$$

DZ P - 5d

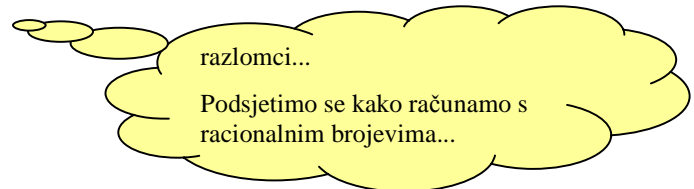
$$\begin{aligned} f(1) &= -3 \cdot 1 - 7 \\ f(1) &= -3 - 7 \\ f(1) &= -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(8) &= -3 \cdot 8 - 7 \\ f(8) &= -24 - 7 \\ f(8) &= -31 \end{aligned}$$

2.) Izračunaj sve vrijednosti koje poprima funkcija f:

$$f : \left\{ \frac{-3}{4}, 0, \frac{1}{2}, 2 \right\} \rightarrow \mathbb{Q}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$



Rješenja:

$$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-3}{4}\right) - \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3}{8} - \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-3-2}{8}$$

$$\boxed{f\left(\frac{-3}{4}\right) = \frac{-5}{8}}$$

$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{4}$$

$$f(0) = 0 - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{f(0) = \frac{-1}{4}}$$

DZ P - 6a

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{4}$$

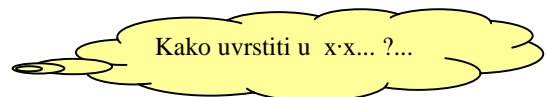
$$f(2) = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{f(2) = \frac{3}{4}}$$

3.) Izračunaj sve vrijednosti koje poprimaju zadane funkcije:

a) $f : \{ -5, -1, 1, 10 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = x \cdot x - 3x - 6$$



Rješenja:

$$f(-5) = -5 \cdot (-5) - 3 \cdot (-5) - 6$$

$$f(-5) = 25 + 15 - 6$$

$$f(-5) = 40 - 6$$

$$\boxed{f(-5) = 34}$$

$$f(-1) = -1 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1) - 6$$

$$f(-1) = 1 + 3 - 6$$

$$f(-1) = 4 - 6$$

$$\boxed{f(-1) = -2}$$

DZ P - 6b

$$f(1) = 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 6$$

$$f(1) = 1 - 3 - 6$$

$$f(1) = 1 - 9$$

$$\boxed{f(1) = -8}$$

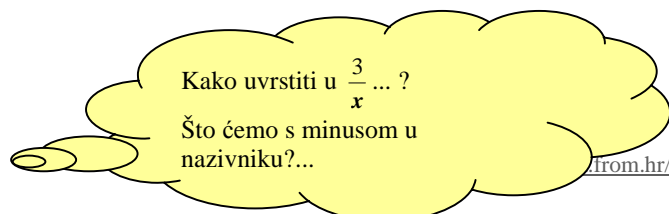
$$f(10) = 10 \cdot 10 - 3 \cdot 10 - 6$$

$$f(10) = 100 - 30 - 6$$

$$f(10) = 100 - 36$$

$$\boxed{f(10) = 64}$$

b) $h : \{ -2, -1, 1, 3 \} \rightarrow \mathbb{Q}$



$$h(x) = \frac{3}{x} - x$$

Rješenja:

$$h(-2) = \frac{3}{-2} - (-2)$$

$$h(-2) = \frac{-3}{2} + 2$$

$$h(-2) = \frac{-3+4}{2}$$

$$\boxed{h(-2) = \frac{1}{2}}$$

$$h(1) = \frac{3}{1} - 1$$

$$h(1) = 3 - 1$$

$$\boxed{h(1) = 2}$$

$$h(-1) = \frac{3}{-1} - (-1)$$

$$h(-1) = -3 + 1$$

$$\boxed{h(-1) = -2}$$

$$h(3) = \frac{3}{3} - 3$$

$$h(3) = 1 - 3$$

$$\boxed{h(3) = -2}$$

DZ P - 6c

Za rezervu (ako zatreba):

4.) Izračunaj sve vrijednosti koje poprima funkcija g:

$$g : \{ -6, -1, 0, 1 \} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$g(x) = -4x - 6$$

Rješenja:

$$g(-6) = -4 \cdot (-6) - 10$$

$$g(-6) = 24 - 10$$

$$\boxed{g(-6) = 14}$$

$$g(-1) = -4 \cdot (-1) - 10$$

$$g(-1) = 4 - 10$$

$$\boxed{g(-1) = -6}$$

$$g(0) = -4 \cdot 0 - 10$$

$$g(0) = 0 - 10$$

$$\boxed{g(0) = -10}$$

$$g(1) = -4 \cdot 1 - 10$$

$$g(1) = -4 - 10$$

$$\boxed{g(1) = -14}$$

5.) Izračunaj sve vrijednosti koje poprima funkcija g:

$$h : \{ -300, -10, 15, 80 \} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$h(x) = -x + 40$$

Rješenja:

$$g(-300) = -(-300) + 40$$

$$g(-300) = 300 + 40$$

$$\boxed{g(-300) = 340}$$

$$g(-10) = -(-10) + 40$$

$$g(-10) = 10 + 40$$

$$\boxed{g(-10) = 50}$$

$$g(15) = -15 + 40$$

$$\boxed{g(15) = 25}$$

$$g(80) = -80 + 40$$

$$\boxed{g(80) = -40}$$

Zadaci za zadaću

1.) Napiši kako se zove funkcija, što je domena, što kodomena i koje je pravilo pridruživanja u sljedećim zadacima:

a) $h : \left\{ \frac{-2}{7}, \frac{1}{8} \right\} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$h(x) = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

b) $g : \{ 0, -3 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$g(x) = -2x - 1$$

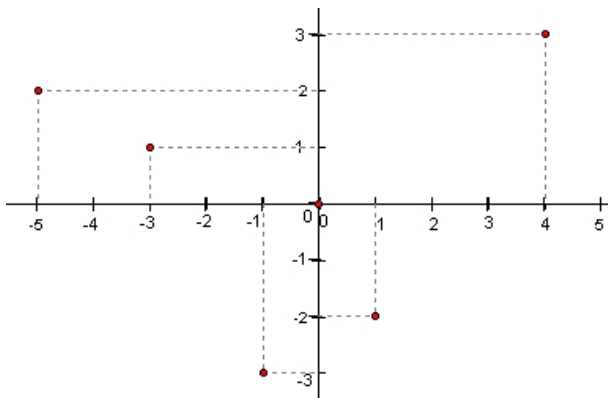
- 2.) a) Kako čitamo zapis $g(x) = -3x + 1$?
b) Kako čitamo zapis $f : \{ -3, 0, 6 \} \rightarrow \mathbb{Z}$?
c) Što nam govori zapis $f : \{ -3, 0, 6 \} \rightarrow \mathbb{Z}$?
b) Kako čitamo zapis $h(-8) = 42$?
c) Što nam govori zapis $h(-8) = 42$?

3.) Sljedeća je funkcija zadana tablično:

x	-3	-1	2	4
y = f(x)	-4	-3	-1	3

- a) Kako se zove funkcija?
b) Što je domena?
c) Koji su brojevi u kodomeni?
d) Grafički prikaži tu funkciju!
e) Prepiši i dopuni: $f(2) = \underline{\quad}$, $f(-3) = \underline{\quad}$
f) Kojem je broju pridružen broj -3 ? $f(\underline{\quad}) = -3$

4.) Sljedeća funkcija zadana je grafički:



- a) Što je domena te funkcije?
b) Koji se brojevi nalaze u kodomeni te funkcije?
c) Pomoću tablice prikaži pridruživanje te funkcije (funkcija neka se zove f).
d) Napiši čemu je jednako $f(-5)$, $f(-3)$... (za sve vrijednosti iz domene)
e) Slikovno prikaži tu funkciju!

5.) Izračunaj sve vrijednosti koje poprima funkcija:

a) $f : \{ -3, 0, 6 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = -4x$$

b) $g : \{ -1, 0, 2, 10 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = x - 7$$

c) $f : \{ 8, -8, 3, -7, -50 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = -x - 8$$

d) $f : \{ -8, -1, 0, 1, 6 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$f(x) = -4x + 5$$

6.) Izračunaj sve vrijednosti koje poprima funkcija:

a) $f : \left\{ \frac{-3}{4}, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2 \right\} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$f(x) = -x - \frac{1}{4}$$

b) $f : \{ -2, 0, 1, 2, 5 \} \rightarrow \mathbb{Q}$

$$f(x) = 2 \cdot x \cdot x - 5x$$

c) $h : \{ -6, -2, -1, 1, 3 \} \rightarrow \mathbb{Z}$

$$h(x) = 2x - \frac{6}{x}$$