

# Mentalni račun...

## opet sam u zaostatku! – 1. dio

Antonija Horvatek, Graberje Ivaničko



U posljednje vrijeme ističe se da učenike trebamo naučiti učiti te da učenici trebaju znati procjenjivati rezultat (npr. u dokumentima prijedloga kurikularne reforme iz 2016.). Oba zahtjeva su itekako na mjestu, međutim za postizanje takvih ciljeva u nastavi se **treba osigurati vrijeme**. Po sadašnjem programu u nastavi nije predviđeno dovoljno vremena za postići takve ciljeve.

### Odakle tvrdnja da se za kvalitetnu nastavu nema dovoljno vremena?

Zahtjev da učenike naučimo razmišljati i zahtjev za procjenom nisu novi zahtjevi. Već godinama se na stručnim skupovima i u časopisima za učitelje ističe njihova važnost. Stoga dio učitelja već odavno pokušava postići to u svojoj nastavi. U sklopu stručne rasprave, na stranicama CKR-a objavljen je prilog s Državnog skupa učitelja i nastavnika matematike održanog u Zadru 21. – 23. ožujka 2016. u sklopu kojeg je jedna kolegica izjavila: "Slušajući ova predavanja jučer i danas uvidjela sam koliko dobrih stvari radim s učenicima već sada, ali i koliko bih mogla još dobrih ideja iskoristiti u daljnjem radu. Do sada je svaki veći iskorak u mojoj organizaciji nastavnog procesa gotovo redovito završio tako da su učenici bili zadovoljni i zainteresirani za nastavak takvog načina rada, a ja u problemima jer sam u zaostatku s nastavnim planom i programom i kako to nadoknaditi." Ova izjava pogađa u srž problema koji nastane kad pokušavamo učenike naučiti

*nešablonski* razmišljati – na to se troši toliko vremena da nakon toga moramo juriti i kroz sljedeće obrade i kroz ponavljanja, ili pak preskočiti nešto od toga. A to znači da u tom drugom gradivu zanemarujemo zahtjev za samostalnim razmišljanjem (ako ne potpuno, onda barem djelomično, jer žurimo kroz gradivo) možda čak i preskačemo određene tipove zadataka koji bi trebali biti napravljeni itd. Ako preskačemo ponavljanje, dopuštamo zaboravu da i dio onoga što smo dobro i kvalitetno napravili, izbriše ili djelomično izbriše. Jednostavno – ako imamo veliki nedostatak vremena, nastava ne valja, rezultati nisu dovoljno dobri!

U želji da (ponovno) skrenem pažnju na taj veliki problem, u ovom ću članku (i njegovom nastavku u idućem broju Miš-a) istaknuti koliko je važno s učenicima vježbati mentalni račun (koji je u našim udžbenicima, a onda i nastavi, jako zanemaren), koliko vremena za to treba, kako učenike vezano uz to navodim na procjenu, koliko vremena za to treba, te ponovno, koje poteškoće nakon toga imam zbog nedostatka vremena. U ovom ću članku detaljnije pisati o mentalnom računu vezanom uz razlomke, a u idućem vezano uz prirodne i decimalne brojeve, postotke i razmjere.

## Razlika između računa napamet i mentalnog računa

Prvo razjasnimo na što mislimo pod “računom napamet”, a na što pod “mentalnim računom”, u skladu s terminologijom korištenom u prijedlogu kurikularne reforme, odnosno s pojašnjenjima koje su neki članovi Stručne radne skupine za matematiku ponudili na forumima.

Pod **računom napamet** smatrat ćemo račune čije smo rezultate memorirali. Npr. u zadatku  $7 \cdot 8$  nitko od nas ne računa  $8 + 8 + \dots$ , već jednostavno imamo memorirano da je to **56**. Slično je sa zbrajanjem i oduzimanjem do **20**.

Pod **mentalnim računom** smatrat ćemo račun u kojem do rezultata dolazimo bez pisanog postupka, zamišljajući si što se događa u zadatku, koristeći se nekim svojstvima u kombinaciji s računom napamet i sl. Npr. kod rješavanja zadatka  $70 \cdot 800$  koristit ćemo se tim što znamo da je  $7 \cdot 8 = 56$  i još se dopišu sve nule iz obaju faktora (koristimo se svojstvima množenja prirodnih brojeva). U zadatku  $4 - \frac{1}{2}$  zamislit ćemo da imamo npr. 4 cijela kruga/pizze i maknemo  $\frac{1}{2}$  kruga/pizze; očito ostaju  $3\frac{1}{2}$  kruga/pizze. To su mentalni računi.

Budući da račun napamet također radimo bez pisanog postupka, u nastavku ovog članka smatrat ćemo da on spada u mentalni račun.

## Procjena i mentalni račun

Svatko tko radi u nastavi zna koliko je učenicima procjena teška i koliko se većina učenika trudi izbjeći je. Da bismo učenike naveli da je rade i (automatski) koriste u životnim zadacima, potrebno je smisliti zadatke kroz koje ćemo, rješavajući te zadatke **zajedno** na satu, postići da automatski počnu procjenjivati. To nije dovoljno napraviti vezano uz npr. prirodne brojeve, pa očekivati da kasnije vezano uz razlomke i/ili decimalne brojeve učenici sami krenu procjenjivati. Uvijek iznova treba skretati pažnju na njezino značenje i inzistirati na njoj;

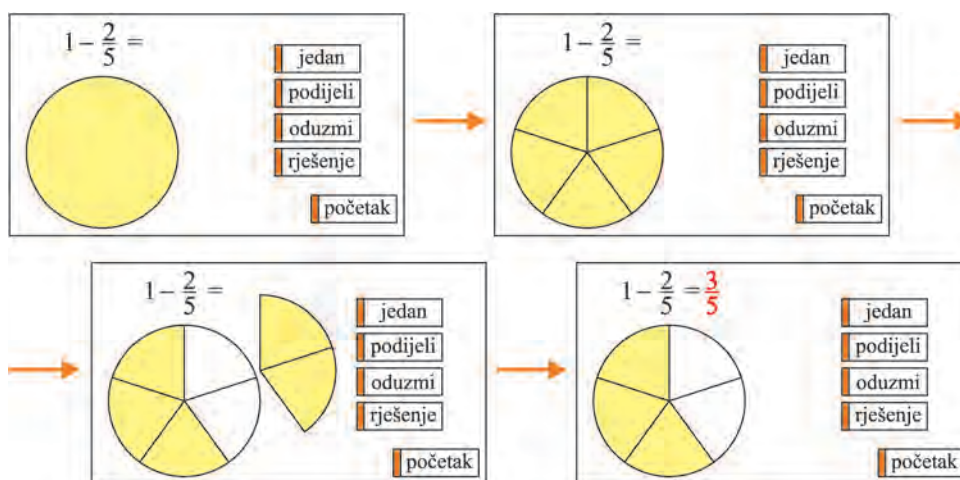
svaki put kad krenemo na novu vrstu brojeva, na nove račune, nove tipove zadataka itd.

Sad imamo problem što, kao prvo, zadatke osmišljene s tim ciljem, gotovo niti nemamo u udžbenicima (ili imamo, ali u malom broju i nekako “izolirane” od ostalih zadataka), pa učitelj sam treba osmisliti i isplanirati takvu nastavu. To je zapravo jako teško jer – učitelju treba dosta godina iskustva dok ne uoči što sve nedostaje u nastavi (i udžbenicima) i dok ne skupi ideje kako to što kvalitetnije i realnije (u skladu s nedostatkom vremena, odnosno da se troši što manje vremena) zakrpati, a i na samo smišljanje zadataka, odnosno osmišljavanje takvog sata odlazi puno vremena. Uz to treba smisliti i nemali broj popratnih zadataka za domaću zadaću, jer u udžbenicima takvih (opet) nema. Naime, ako učenici sami kod kuće i ne prođu takav način razmišljanja, neće biti osjetne koristi od samog rada na satu. Ako učitelj u školi nema mogućnost kopiranja, onda je priprema zadataka za zadaću na posebnim papirima, problem koji je nemoguće riješiti, osim ako učitelj svojim novcem ne plaća kopiranje izvan škole, što je poražavajuća i sramotna realnost, nadam se, što rjeđa.

Prije nego što s učenicima krenemo na **procjenu**, bitno je savladati **mentalni račun**. Naime, procjena se radi **mentalno** (bez pisanog postupka), pa ako ne možemo vršiti mentalne račune, jasno je da ne možemo ni procjenjivati. Naravno, nije samo mentalni račun pretpostavka za procjenu. Da bi učenici mogli procjenjivati rezultate (bilo u brojčanim, bilo u životnim tekstualnim zadacima), trebaju biti sposobni učiniti sljedeće korake:

1. Razumjeti o čemu se radi u zadatku i, u skladu s tim, koje računske operacije s kojim brojevima napraviti.
2. Zaokružiti zadane brojeve na “približne okrugle” vrijednosti s kojima će se moći napraviti mentalni račun.
3. Izvršiti mentalni račun.

Naravno, kod učenika želimo postići da u svakom zadatku, u kojem su brojevi takvi da se s njima može računati mentalno, do rješenja dođu mentalno, a ako brojevi nisu takvi, da izvrše procjenu, čak i onda kad to eksplicitno ne piše u zadatku.



Slika 1.

Kako postići taj *automatizam*? Uzmimo za **primjer zbrajanje i oduzimanje razlomaka**:

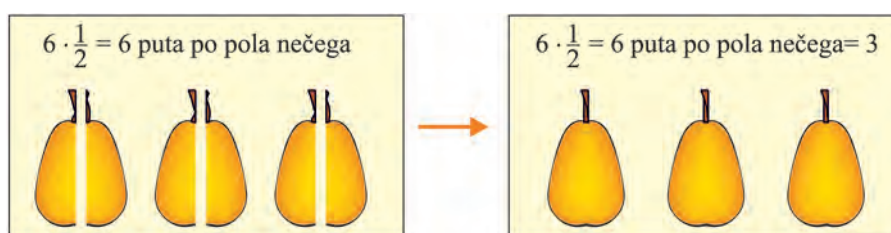
1. Prvo trebamo uočiti, odnosno učitelj treba biti svjestan toga **koji se sve tipovi** računskih zadataka iz tog gradiva mogu rješavati mentalno, npr.  $1 - \frac{2}{5}$ ,  $4 - \frac{3}{7}$ ,  $7 + \frac{8}{5}$ ,  $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$ ,  $4\frac{5}{6} - 1\frac{4}{6}$ ,  $5\frac{7}{8} + 1\frac{1}{8}$ ,  $1\frac{3}{7} + 6$ ,  $6 - 1\frac{3}{7}$ ,  $2\frac{8}{9} + \frac{4}{9}$ ,  $7\frac{2}{5} - \frac{3}{5}$ .

2. S učenicima bi trebalo vježbati mentalni račun u takvim **brojčanim** zadacima, uz **vizualno predodžjenje** onoga što se događa u zadatku. Za vizualno predodžjenje mogu se koristiti programi dinamične geometrije (slika 1), Power Point prezentacije (slika 2), možda od kartona imamo izrađene modele *pizze* i njezinih dijelova koje s pomoću magneta stavimo na ploču, skiciranje po ploči. . .

3. Osim brojčanih zadataka navedenih tipova, treba zadavati i **tekstualne životne** zadatke u kojima se opet pojavljuju brojevi/razlomci s kojima se može računati mentalno, ali da u zadacima nije ekspli-

citno navedena računaska operacija, već se iz neke životne situacije opisane u zadatku treba zaključiti što računati i koje je rješenje.

4. Kad se savlada **pisani račun** (kojim se koristimo u zadacima u kojima ne možemo računati mentalno, npr. u zadatku  $2\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6}$ ), među takve zadatke **naizmjenice** treba ubacivati i ove u kojima se može računati mentalno, te kad se takvi pojave, ako učenici sami ne uoče, skrenuti im pažnju da takve možemo riješiti na oba načina. Pažnju im možemo skrenuti **nakon** što riješe zadatak pisanim putem (pitanjem jesmo li mogli drukčije doći do rješenja) ili **na samom početku** (uputom da razmisle ima li više načina da se dođe do rješenja te, ako uočavaju te načine, preporuka je da se koriste praktičnijim i bržim). Naravno, na nekoliko primjera treba napraviti oba načina (pisani i mentalni) i uočiti da se dobiva isti rezultat. Nakon nekoliko ubacivanja takvih zadataka i skretanja pažnje da se oni mogu riješiti na više načina, dio učenika počne i sam u sljedećim zadacima *vrebati* hoće li *uletjeti* neki zadatak koji se može za tren oka ri-



Slika 2.

ješiti mentalno, i rado to počnu činiti. S vremenom se broj takvih učenika povećava ako ustrajemo na ubacivanju takvih zadataka i na raspravama na koje se sve načine zadatci mogu riješiti. Ujedno se s vremenom automatski počne događati da u zadacima u kojima se ne može računati mentalno, krenu procjenjivati rezultat i da nakon pisanog računa rezultat usporede s procjenom. Na to također stalno treba upućivati i naglas raspravljati.

**5.** Kad se rješavaju **životni tekstualni** zadatci, opet se među one u kojima su brojevi takvi da se ne može računati mentalno, treba **naizmjenice** ubacivati one s kojima se može, i opet s učenicima treba komentirati može li se neki zadatak riješiti na više načina. Time opet postizemo da dio učenika počne iščekivati mentalne račune i uočavati ih kad se pojave. Ujedno u zadacima u kojima nisu cijeli brojevi, prije početka pisanog računa stalno treba ispitivati oko kojeg broja možemo očekivati rezultat i zašto – procjena. Nakon pisanog računa komentirat ćemo je li rezultat blizu procijenjene vrijednosti i što znači “blizu”. Procjena se ponekad može vršiti na više načina, zaokružujući brojeve na različite vrijednosti, pa i to treba komentirati.

Što sve, u vezi s gore navedenim, nedostaje u našim sadašnjim udžbenicima?

**1. Brojčani** zadatci u kojima se može vršiti mentalni račun iz zbrajanja i oduzimanja razlomaka, navedeni jedan iza drugoga u svrhu uvježbavanja što si zamišljamo kod mentalnog računa.

**2.** Niz mješovitih brojčanih zadataka koje bismo **naizmjenice** rješavali **pisanim i mentalnim** računom, npr.  $6 + 1\frac{3}{7}$ ,  $2\frac{3}{4} + 1\frac{5}{6}$ ,  $9\frac{3}{8} - 1\frac{2}{8}$ ,  $3\frac{5}{9} - 1\frac{5}{6}$ ... Takav je mješoviti niz potreban za uvježbavanje **prebacivanja** s jednog načina razmišljanja na drugi – s mentalnog računa (u zadacima u kojima su brojevi pogodni za takav račun) na pisani račun u kombinaciji s procjenom (u zadacima s *nezgodnim* brojevima), i obrnuto, a ujedno i za provjeru mogu li učenici **prepoznati** koji se zadatci mogu riješiti mentalno.

**3. Tekstualni životni** zadatci koji se mogu riješiti mentalno.

**4.** Niz mješovitih životnih zadataka u kojima ćemo **naizmjenice** neke moći riješiti mentalno, a neke ne.

Naravno, taj nedostatak u udžbenicima nemamo samo vezano uz zbrajanje i oduzimanje razlomaka, već i vezano uz ostale račune s razlomcima, uz račune s prirodnim brojevima, decimalnim brojevima, racionalnim brojevima, proporcionalnim veličinama, postotcima... Kad savladamo sve računске operacije s razlomcima, na kraju bi trebalo ponuditi raznolike zadatke iz svih mogućih računa – **s raznim računskim operacijama**, s pisanim i/ili mentalnim računom... i uvježbati **prebacivanje** s jednog tipa na drugi, procjenu, stalno raspravljati o svemu... Zanimljivo je uočiti da su u sadašnjim udžbenicima, **čak i na kraju cjeline Razlomci**, autori zadatke grupirali – prvo idu oni iz zbrajanja i oduzimanja, zatim iz množenja, a zatim iz dijeljenja. Zašto bar sad na kraju, nakon što su savladane sve računске operacije, nije napravljen niz mješovitih zadataka, pa da učenik rješavajući redom, mora mijenjati način razmišljanja, pa makar i na tom najbanalnijem nivou – u brojčanim zadacima koji se svi redom rješavaju pisanim postupkom? Grupiranje po tipovima je u redu na početku kad se uči neka računska operacija, međutim nakon što sve savladaju, treba ponuditi raznolike zadatke. Tako bi trebalo i u vezi s cijelim brojevima, racionalnim itd.

Već je opisan način kako ja na nekim mjestima uvježbavam mentalni račun i procjenu, s tim da se ne držim uvijek točno navedenog redoslijeda. Npr. kod računanja s razlomcima prvo obradim pisani račun, a tek nakon toga mentalni, dok kod postotka prvo mentalni, a nakon toga pisani. Bez obzira na redoslijed, važno je nakon toga izmjenjivati navedene tipove zadataka.

## Mentalni račun

Osim zbog procjene, mentalni račun je važno vježbati i iz sljedećih razloga:

**1.** kroz njega razvijamo osjećaj o broju, npr. da bismo zadatak  $2 \cdot \frac{1}{2}$  mogli riješiti mentalno, moramo znati koju količinu predstavlja broj  $\frac{1}{2}$

2. razvijamo osjećaj o smislu računске operacije, npr. iz zadatka  $2 \cdot \frac{1}{2}$  treba iščitati da uzimamo

**dva puta** po pola *pizze*, a u zadatku  $2 - \frac{1}{2}$  od dvije cijele *pizze* **oduzimamo** pola *pizze*.

Ako učenici na kraju cjeline Razlomci, u šestom razredu, ne znaju zamisliti što se događa u zadacima  $2 \cdot \frac{1}{2}$  i  $2 - \frac{1}{2}$ , a činjenica je da mnogi ne znaju (i automatski posežu za pisanim računom), možemo li reći da oni **razumiju pojam razlomka i pojam računске operacije**? U čemu je problem? Možda u tome što takve zadatke, u kojima se koristimo mentalnim računom, skoro niti ne rješavamo u nastavi. Ne zadajemo dovoljno ni brojčanih, ni životnih zadataka u kojima ćemo se koristiti takvim računom.

Slijede zadatci iz množenja i dijeljenja razlomaka koji se mogu rješavati mentalno, koje bismo po mojem mišljenju trebali raditi s učenicima, koji bi trebali biti razrađeni u udžbenicima (sad nisu!) i za koje bi nam **trebalo biti oslobođeno vrijeme** da se na takvim stvarima zadržavamo u nastavi (sad to vrijeme nemamo):

- $\frac{1}{2} \cdot 8$ ,  $8 \cdot \frac{1}{2}$  i sl. (s učenicima treba uočiti **razliku u razmišljanjima** u ova dva zadatka: pola od osam i osam puta po pola; uočiti i da su rezultati isti. Ujedno treba istaknuti i primjenjivati da množenjem sa  $\frac{1}{2}$  dobivamo pola broja, množenjem sa  $\frac{1}{3}$  dobit ćemo trećinu broja itd.)
- $5 \cdot \frac{1}{2}$ ,  $2 \cdot 3\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{1}{2} \cdot 2 \dots$  (množenje cijelog broja sa  $\frac{1}{2}$  i s mješovitim brojem u kojem je  $\frac{1}{2}$ ; rješavati uzastopnim zbrajanjem (mješovite brojeve u kojima su polovine lako zbrajamo napamet) i/ili korištenjem distributivnosti)
- $\frac{3}{4}$  od 24,  $\frac{3}{4} \cdot 24$  i sl. (koja je veza između tih dvaju zadataka i možemo li oba izračunati mentalno)
- kako zamišljamo  $\frac{3}{4} : 3$ , a kako  $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$  i sl. (u  $\frac{3}{4} : 3$  zamišljamo da  $\frac{3}{4}$  pizze dijelimo na troje

djece, a u  $\frac{3}{4} : \frac{1}{4}$  se pitamo koliko puta  $\frac{1}{4}$  ide u  $\frac{3}{4}$ )

- $2 : 3$ ,  $7 : 5$ ,  $12 : 4$ ,  $4 : 12 \dots$
- dijeljenje neparnog broja sa 2, npr.  $3 : 2$ ,  $11 : 2 \dots$  (odmah reći sredeno rješenje – mješoviti broj)
- dijeljenje malog prirodnog broja sa  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4} \dots$ , npr.  $1 : \frac{1}{2}$  (koliko puta  $\frac{1}{2}$  stane u 1),  $2 : \frac{1}{3} \dots$
- dijeljenje sa  $1\frac{1}{2}$ ,  $2\frac{1}{2}$ ,  $3\frac{1}{2}$  i sl. kad je rezultat mali prirodni broj, npr.  $7 : 3\frac{1}{2}$ ,  $4\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2}$ ,  $5 : 2\frac{1}{2}$  (pitamo se koliko puta djeljitelj stane u djeljenu) (pitamo se koliko puta djeljitelj stane u djeljenu)
- $\frac{32}{25} : \frac{8}{5}$ ,  $\frac{18}{25} : 9$  (dijeljenje kad je brojnik djeljiv brojnikom, a nazivnik nazivnikom – trik koji je ponekad praktično primijeniti)

itd.

Kad se to krene raditi u nastavi (i kroz brojčane i kroz tekstualne životne zadatke), jasno da se broj sati koje ćemo potrošiti u cjelini Razlomci, osjetno povećati. Naravno, teško je odlučiti u kojoj cjelini nakon toga smanjiti broj sati jer većina toga što radimo u osnovnoj školi spada u osnove, a i na mnogim drugim mjestima bi broj sati trebalo povećati da bismo s učenicima vježbali kako razmišljati i da ih kroz zajedničko rješavanje zadataka navodimo na procjenu. Najčešće smanjim broj sati u geometriji, no time nisam zadovoljna jer tada neke stvari u njoj zaista samo “preletimo”, a smatram da to nije dovoljno dobro. No, ako odlučim u geometriji zadržati veći broj sati, onda ovo o čemu pišem u članku, jednostavno nemam kad odraditi. Nigdje nije propisano što je važnije napraviti i gdje “nikako ne smijemo raditi manje dobro”. Nekako se očekuje da (dobar) učitelj stigne **sve** napraviti kvalitetno, no to je u satnici koju imamo i u skladu sa sadašnjim NPiP-om, **ne moguće**.

U idućem će članku biti riječi o mentalnim računima vezanim uz prirodne i decimalne brojeve, razmjere i postotke.