MATEMATIČKI KLOKAN C 2020.

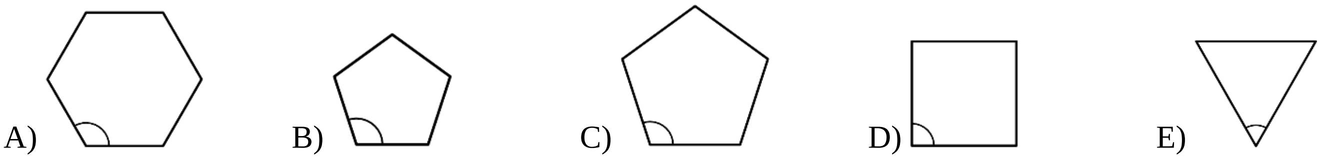
RJEŠENJA ZADATAKA

Pitanja za 3 boda:

1. Koliko je prostih brojeva među sljedeća četiri broja: 2, 20, 202, 20202?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje: B

2. U kojemu je od sljedećih pravilnih mnogokuta označeni kut najveći?

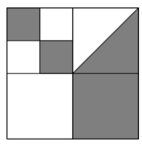


Rješenje: A
Unutarnji kut jednakostraničnog trokuta ima veličinu 60°, kvadrata 90°, pravilnog peterokuta 108°, a pravilnog šesterokuta 120°. Najveći kut označen je na slici A).

3. Svaki dan Mihael riješi po šest zadataka s Matematičke olimpijade, a Leon ih riješi četiri. Koliko će dana trebati Leonu da riješi onoliko zadataka koliko ih Mihael riješi u četiri dana?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: C
Kako Mihael svaki dan riješi po šest zadataka, za četiri će dana riješiti 24 zadatka. Leonu će za 24 zadatka trebati 24 : 4 = 6 dana.

4. Veliki je kvadrat podijeljen na manje kvadrate, a jednome od njih nacrtana je dijagonala. Koliki je dio velikoga kvadrata osjenčan?



A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Rješenje: E
Veliki kvadrat podijeljen je na četvrtine. U gornje dvije četvrtine osjenčana je polovina. Od preostale dvije četvrtine, jedna je osjenčana, a druga nije. Dakle, osjenčana je polovina. Ukupno je osjenčana polovina kvadrata.

5. Na nogometnom turniru sudjeluju četiri ekipe. Svaka ekipa igra po jednu utakmicu sa svakom od preostalih ekipa. U svakoj utakmici pobjednik dobiva tri boda, a ekipa koja gubi ne dobiva bodove. Ako je rezultat neriješen, obje ekipe dobivaju po jedan bod. Koji od sljedećih brojeva ne može biti ukupan broj bodova bilo koje ekipe nakon što su odigrane sve utakmice na turniru?
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Rješenje: E
Svaka ekipa odigrala je točno tri utakmice. Tablično prikažimo ukupan mogući broj bodova jedne ekipe.

Broj dobivenih utakmica	Broj neriješenih utakmica	Broj izgubljenih utakmica	Ukupan broj bodova
3	0	0	$3 \cdot 3 = 9$
2	1	0	$2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 7$
2	0	1	$2 \cdot 3 = 6$
1	2	0	$1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 5$
1	1	1	$1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 4$
1	0	2	$1 \cdot 3 = 3$
0	3	0	$3 \cdot 1 = 3$
0	2	1	$2 \cdot 1 = 2$
0	1	2	$1 \cdot 1 = 1$
0	0	0	0

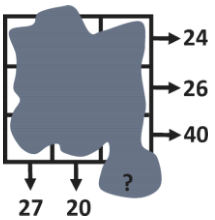
6. Kala želi pomnožiti neka tri broja od sljedećih brojeva: -5, -3, -1, 2, 4 i 6. Koji je najmanji mogući rezultat koji će dobiti?
A) -200 B) -120 C) -90 D) -48 E) -15

Rješenje: B
Najmanji mogući rezultat dobit će ako pomnoži jedan negativan i dva pozitivna broja kojima su apsolutne vrijednosti tri najveće moguće. To su brojevi -5, 4 i 6 pa je njihov umnožak -120.

7. Ako Ivan u školu ide autobusom, a vraća se pješice, putovat će 3 sata. Ako u oba smjera ide autobusom, trebat će mu 1 sat. Koliko će mu trebati vremena ako u oba smjera ide pješice?
A) 3.5 sata B) 4 sata C) 4.5 sata D) 5 sati E) 5.5 sati

Rješenje: D
Kako mu za oba smjera autobusom treba 1 sat, za jedan mu smjer treba 0.5 sati. To znači da za jedan smjer pješice treba 2.5 sati, a onda će za oba smjera pješice trebati 5 sati.

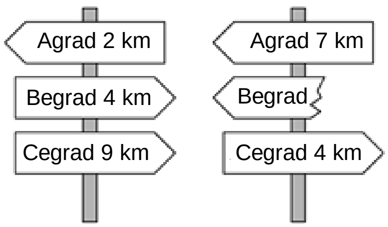
8. U svakoj ćeliji kvadratne mreže 3 x 3 upisan je jedan broj. Nažalost, brojevi nisu vidljivi zbog mrlje od tinte. Ipak, poznati su zbrojevi u svakom retku i svakom stupcu, kao što je prikazano na slici. Koliki je zbroj brojeva u trećem stupcu?
A) 41 B) 43 C) 44 D) 45 E) 47



Rješenje: B
Zbroj svih brojeva u tablici je 24 + 26 + 40 = 90. Onda je zbroj brojeva u trećem stupcu 90 – 27 – 20 = 43

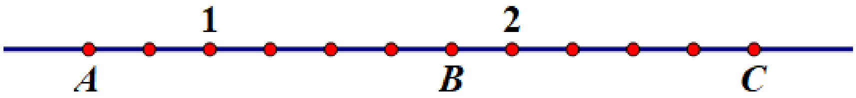
Pitanja za 4 boda:

9. Najkraći put od Agrada do Cegrada vodi preko Begrada. Duž toga puta postavljena su dva putokaza. Koja je udaljenost bila napisana na slomljenome dijelu znaka?



A) 1 km B) 3 km C) 4 km D) 5 km E) 9 km

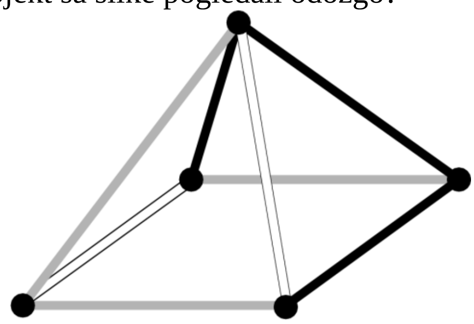
Rješenje: A
Prikažimo položaj putokaza 1 i 2 na brojevnom pravcu, pri čemu je udaljenost susjednih točaka 1 km. Sada je očito da je na slomljenom dijelu znaka pisalo 1 km.

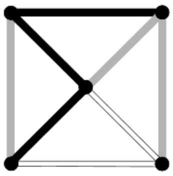
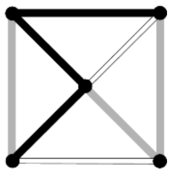
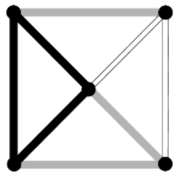
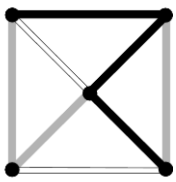
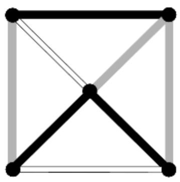


10. U ožujku Ana planira hodati svaki dan, prosječno 5 km dnevno. Prije spavanja, 16. ožujka, shvatila je da je do sada prešla ukupno 95 km. Koliko prosječno dnevno treba hodati preostalih dana ožujka da bi postigla svoj cilj?
A) 5.4 km B) 5 km C) 4 km D) 3.6 km E) 3.1 km

Rješenje: C
Budući da ožujak ima 31 dan, a Ana je planirala hodati prosječno 5 km dnevno, ukupno će prijeći 155 km. U prvih 16 dana ožujka prešla je 95 km, što znači da će preostalih 15 dana trebati prijeći 60 km, odnosno prosječno 60 : 15 = 4 km dnevno.

11. Što bismo vidjeli kada bismo objekt sa slike pogledali odozgo?



A) 
B) 
C) 
D) 
E) 

Rješenje: B
Iz središta prema vrhovima kvadrata, u smjeru gibanja kazaljke na satu nacrtane su crna, crna, bijela pa siva crta. Stoga rješenja nisu prikazana crtežima A) i E). Crna i crna crta određuju sivu stranicu kvadrata, crna i bijela crta crnu stranicu kvadrata, bijela i siva crta sivu stranicu kvadrata, a siva i crna crta bijelu stranicu kvadrata, stalno gledano u smjeru gibanja kazaljke na satu. Dakle, odgovor je B).

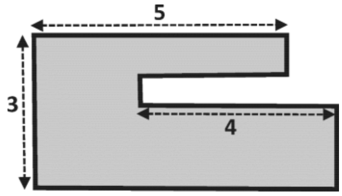
12. Svaki učenik u razredu ili pliva ili pleše. Tri petine učenika toga razreda pliva, a tri petine ih pleše. Pet učenika i pliva i pleše. Koliko je učenika u tome razredu?
A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

Rješenje: C
Označimo s x ukupan broj učenika u tom razredu. Tada vrijedi:

$$\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}x-5=x$$

Rješenje ove jednadžbe je x = 25, dakle u razredu je 25 učenika.

13. Sašin vrt ima oblik kao na slici. Svake su dvije stranice toga vrta ili međusobno paralelne ili međusobno okomite. Neke dimenzije prikazane su na slici. Koliki je opseg Sašinog vrta?



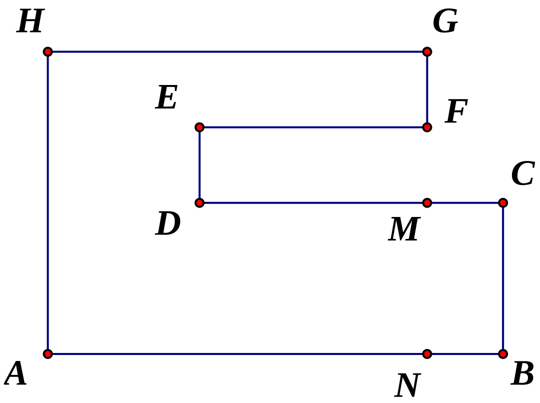
A) 22 B) 23 C) 24 D) 25 E) 26

Rješenje: C

Lik na slici je osmerokut. Označimo njegove vrhove A, B, C, D, E, F, G i H. Na dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{DC}$ označimo točke N i M tako da je $|NB|=|MC|=x.$ Sada je $|EF|=4-x.$

Kako je $|BC|+|DE|+|FG|=|AH|$, vrijedi:

$$\begin{aligned} o_{ABCDEFGH} &= |AB|+|BC|+|DC|+|DE|+|EF|+|FG|+|HG|+|AH| \\ &= |AB|+|DC|+|EF|+|HG|+2|AH| \\ &= 5+x+4+4-x+5+2\cdot 3=24 \text{ cm.} \end{aligned}$$

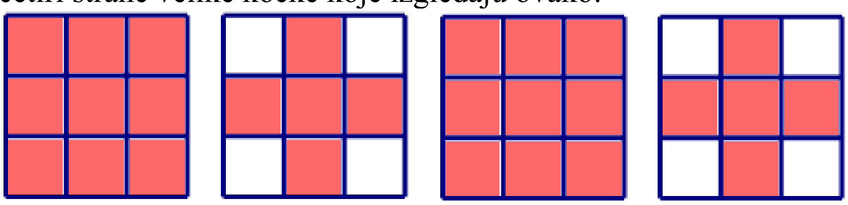


14. Andrew kupuje 27 identičnih kockica. Svaka je s dvije susjedne strane obojena u crveno. Od tih kockica planira složiti veliku kocku. Koliki je najveći mogući broj potpuno crvenih strana takve kocke?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Rješenje: C

Kako je velika kocka sastavljena od 27 malih, njena je dimenzija 3 x 3 x 3. Postavimo 1. sloj od 9 kockica tako da je jedna crvena strana svake od njih na dnu, a druga crvena strana 8 rubnih kockica ne dodiruje niti jednu drugu kockicu. Time je dno velike kocke u potpunosti crveno. Na isti ćemo način postaviti i treći sloj, samo što će gornja ploha velike kocke biti crvena. Time dobivamo i drugu crvenu stranu velike kocke. Drugi (srednji) sloj velike kocke složimo tako da vanjske strane kockica budu crvene. Time dobivamo preostale četiri strane velike kocke koje izgledaju ovako:



Konačno, ukupan broj crvenih strana velike kocke je 4.

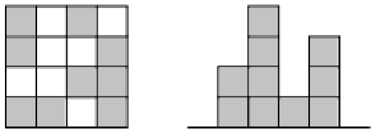
15. Vladimirova plaća iznosi 20% plaće njegovog šefa. Za koliko je posto šefova plaća veća od Vladimirove?

A) 80% B) 120% C) 180% D) 400% E) 520%

Rješenje: D

Ako je Vladimirova plaća x, a plaća njegovog šefa y, onda vrijedi x = 20% od $y = 0.2y$. Odavde je $y=\frac{1}{0.2}x=\frac{10}{2}x=5x$, odnosno $y = x + 4x = x$ + 400% od x. Dakle, šefova je plaća za 400% veća od Vladimirove plaće.

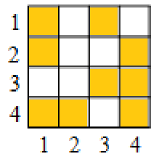
16. Irena je napravila »grad« s jednakim drvenim kockama. Jedna slika prikazuje pogled na njezin »grad« odozgo, a druga sa strane. Međutim, ne zna se s koje strane je pogled sa strane. Koliki je najveći mogući broj kocaka koje je Irena mogla koristiti za svoj »grad«?



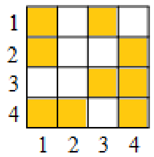
A) 25 B) 24 C) 23 D) 22 E) 21

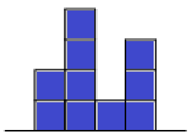
Rješenje: B

Najveći mogući broj kockica dobijemo tako da za svaku građevinu u retku ili stupcu uzimamo najveći mogući broj kockica. Označimo redove i stupce kao na slici:

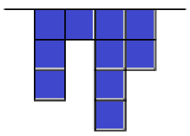


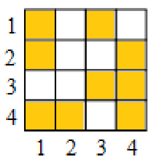
Neka je druga slika pogled sprijeda.



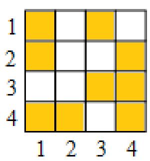


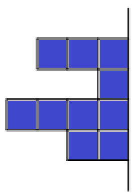
U 1. stupcu najviši dio sastavljen je od 2 kockice, u tom su redu 3 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 3 · 2 = 6.
U 2. stupcu najviši dio sastavljen je od 4 kockice, u tom je redu samo jedan objekt pa je najveći mogući broj korištenih kockica 4.
U 3. stupcu najviši dio sastavljen je od 1 kockice, u tom su redu 2 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 2 · 1 = 2.
U 4. stupcu najviši dio sastavljen je od 3 kockice, u tom su redu 3 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 3 · 3 = 9.
U ovom slučaju najveći je mogući broj korištenih kockica 6 + 4 + 2 + 9 = 21.





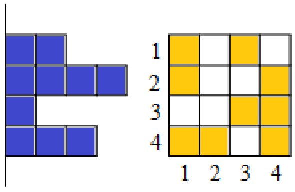
Neka je druga slika pogled straga.
U 1. stupcu najviši dio sastavljen je od 3 kockice, u tom su redu 3 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 3 · 3 = 9.
U 2. stupcu najviši dio sastavljen je od 1 kockice, u tom je redu samo jedan objekt pa je najveći mogući broj korištenih kockica 1.
U 3. stupcu najviši dio sastavljen je od 4 kockice, u tom su redu 2 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 2 · 4 = 8.
U 4. stupcu najviši dio sastavljen je od 2 kockice, u tom su redu 3 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 3 · 2 = 6.
U ovom slučaju najveći je mogući broj korištenih kockica 9 + 1 + 8 + 6 = 24.





Neka je druga slika pogled zdesna.
U 1. redu najviši dio sastavljen je od 2 kockice, u tom su redu 3 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 3 · 2 = 6.
U 2. redu najviši dio sastavljen je od 4 kockice, u tom su redu 2 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 2 · 4 = 8.
U 3. redu najviši dio sastavljen je od 1 kockice, u tom su redu 2 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica 2 · 1 = 2.

U 4. redu najviši dio sastavljen je od 3 kockice, u tom su redu 2 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica $2 \cdot 3 = 6$.
U ovom slučaju najveći je mogući broj korištenih kockica $6 + 8 + 2 + 6 = 22$.



Neka je druga slika pogled slijeva.
U 1. redu najviši dio sastavljen je od 3 kockice, u tom su redu 3 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica $3 \cdot 3 = 9$.
U 2. redu najviši dio sastavljen je od 1 kockice, u tom su redu 2 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica $2 \cdot 1 = 2$.
U 3. redu najviši dio sastavljen je od 4 kockice, u tom su redu 2 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica $2 \cdot 4 = 8$.
U 4. redu najviši dio sastavljen je od 2 kockice, u tom su redu 2 objekta pa je najveći mogući broj korištenih kockica $2 \cdot 2 = 4$.
U ovom slučaju najveći je mogući broj korištenih kockica $9 + 2 + 8 + 4 = 23$.
Dakle, najveći mogući broj kocaka koji je Irena upotrijebila za svoj grad je 24.

Pitanja za 5 bodova:

17. Dvanaest obojenih kocaka složeno je u niz. Među njima su 3 plave kocke, 2 žute, 3 crvene i 4 zelene, ali ne u tom poretku. Na jednom je kraju žuta, a na drugom crvena kocka. Crvene se kocke međusobno dodiruju. Zelene se kocke također dodiruju. Deseta kocka s lijeve strane je plava. Koje je boje šesta kocka slijeva?

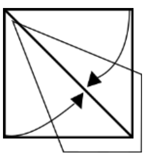
A) zelena B) žuta C) plava D) crvena E) crvena ili plava

Rješenje: A
Kako su na krajevima žuta i crvena kocka, a deseta slijeva je plava, zaključujemo da je na lijevom kraju crvena kocka jer se crvene međusobno dodiruju i ima ih tri. Prikažimo sada poredak koji smo utvrdili i označimo žutom mjesto tražene kocke.

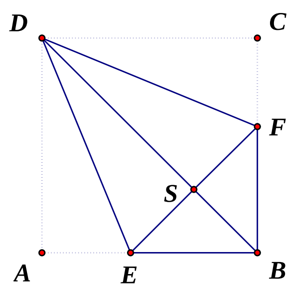
C	C	C							P		Ž

Kako se zelene kocke međusobno dodiruju, a ima ih četiri, zaključujemo da je šesta kocka slijeva zelena.

18. Vanja je uzela kvadratni komad papira i presavinula dvije njegove stranice prema dijagonali formirajući pritom četverokut, kao što je prikazano na slici. Koje je veličine najveći kut tako dobivenog četverokuta?



A) 112.5° B) 120° C) 125° D) 135° E) 150°



Rješenje: A
Označimo kvadrat koji je Vanja presavinula kao *ABCD*, a dobiveni četverokut kao *EBFD*. Četverokut *EBFD* je osnosimetričan s obzirom na *DB* pa je $\measuredangle BED \cong \measuredangle DFB$, i to su najveći kutovi tog četverokuta.
Presavijanjem trokuta *AED* dobijemo trokut *SED*. Presavijanjem trokuta *CDF* dobijemo trokut *SDF*. Ta su četiri trokuta sukladna pa vrijedi: $|\measuredangle ADE| = |\measuredangle EDS| = |\measuredangle SDF| = |\measuredangle FDC|$, stoga $\measuredangle EDF$ čini polovinu pravog kuta, tj. $|\measuredangle EDF| = \frac{90°}{2} = 45°$.
Označimo s α veličinu najvećeg kuta četverokuta *EBFD*. Tada vrijedi:
$2\alpha + 90° + 45° = 360°$

$2\alpha = 225°$
$\alpha = 112.5°$

19. U finalu plesnog natjecanja svaki od tri suca dao je natjecateljima 0, 1, 2, 3 ili 4 boda. Nitko od natjecatelja nije dobio isti broj bodova od istoga suca. Adam zna ukupan broj bodova za svakog natjecatelja i nekoliko dobivenih pojedinačnih bodova, kao što je prikazano u tablici. Koliko je bodova Adam dobio od trećega suca?

	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0			
II		2	0		
III					
Zbroj	7	5	3	4	11

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Rješenje: B
Očito je da je sudac br. III dao Bugi 3 boda. Kako nitko od natjecatelja nije dobio isti broj bodova od istoga suca, to znači da Cvita nije mogla dobiti 3 boda od suca br. III, nego 0, 1 ili 2 boda. No, ako je dobila 1 bod, onda joj je sudac br. I dao 2 boda, što je nemoguće.
Razmotrimo situaciju u kojoj je Cvita dobila 0 bodova od III. suca i dopunimo tablicu ovim podacima:

	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0	3		
II		2	0		
III		3	0		
Zbroj	7	5	3	4	11

Emilov je zbroj 11, a to je moguće samo ako je dobio 4+4+3 ili 4+3+4 ili 3+4+4. Zadnji zbroj nije ostvariv jer bi to značilo da su i Cvita i Emil od I. suca dobili 3 boda. Također, prvi zbroj nije ostvariv jer bi to značilo da je III. sudac dao dvije iste ocjene. Dakle, Emilov je zbroj nastao kao 4+3+4.

	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0	3		4
II		2	0		3
III		3	0		4
Zbroj	7	5	3	4	11

Sad je Dan od prvog suca dobio 1, a preostala 3 boda mogao je dobiti kao zbroj 0+3, 1+2, 2+1, 3+0. No, zbog uvjeta da sudac daje različite bodove različitim osobama, jedini zbroj koji odgovara tom uvjetu je 1+2.

	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0	3	1	4
II		2	0	1	3
III		3	0	2	4
Zbroj	7	5	3	4	11

Konačno popunjavamo Adamov stupac preostalim bodovima:

	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0	3	1	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	0	2	4
Zbroj	7	5	3	4	11

Adam je dobio 1 bod od III. suca.

Razmotrimo drugu situaciju, kad je Cvita dobila 2 boda od III. suca, i dopunimo tablicu ovim podacima:

	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0	1		
II		2	0		
III		3	2		
Zbroj	7	5	3	4	11

Dan je dobio ukupno 4 boda. Od suca br. I mogao je dobiti 3 ili 4 boda. Da je dobio 4 boda, onda bi od ostalih sudaca dobio po 0 bodova, što je nemoguće zbog suca br. II. Dakle, od suca br. I dobio je 3 boda, a od suca br. II dobio je 1 bod. Znači da je od suca br. III dobio 0 bodova. Sada tablica izgleda ovako:

	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0	1	3	
II		2	0	1	
III		3	2	0	
Zbroj	7	5	3	4	11

Da je sudac br. II Adamu dao 3 boda, onda bi Adam dobio 2 boda od suca br. III, što je nemoguće. Dakle, od suca br. II dobio je 4, a od suca br. III dobio je 1 bod. Dopunimo tablicu ovim podacima:

	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0	1	3	
II	4	2	0	1	
III	1	3	2	0	
Zbroj	7	5	3	4	11

Kako su suci dali natjecateljima 0, 1, 2, 3 ili 4 boda, konačno imamo:

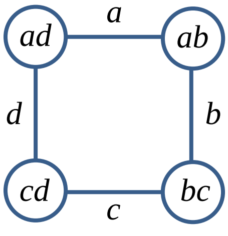
	Adam	Buga	Cvita	Dan	Emil
I	2	0	1	3	4
II	4	2	0	1	3
III	1	3	2	0	4
Zbroj	7	5	3	4	11

I u ovom slučaju Adam je dobio 1 bod od III. suca.

20. Sanja je napisala pozitivan cijeli broj na svaku stranicu kvadrata. Također je napisala brojeve u svakom vrhu, i to tako da je broj u vrhu jednak umnošku brojeva na stranicama koje određuju taj vrh. Ako je zbroj brojeva u vrhovima jednak 15, koliki je zbroj brojeva napisanih na stranicama toga kvadrata?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 15

Rješenje: C

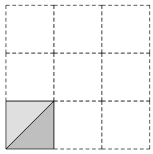


Označimo brojeve napisane na stranicama a, b, c, d. Kako je broj u vrhu umnožak brojeva na stranicama, onda možemo označiti taj kvadrat kao na slici. Tada vrijedi:
$ad + ab + cd + bc = 15$
$a(d + b) + c(d + b) = 15$
$(d + b)(a + c) = 15$
Broj 15 možemo zapisati u obliku umnoška na sljedeće načine: $1 \cdot 15$ ili $3 \cdot 5$. Kako su a, b, c, d pozitivni cijeli brojevi, tada je zbroj bilo koja dva takva broja veći od 1, pa je jedan od faktora jednak 3, a drugi 5. Zbrajanjem tih faktora dobijemo:
$d + b + a + c = 8$.

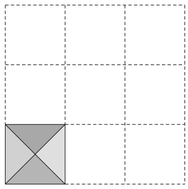
21. Maja ima 52 sukladna jednakokračna pravokutna trokuta. Koristeći neke od njih želi napraviti kvadrat. Koliko kvadrata veličinom različitih može napraviti?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

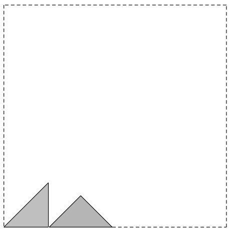
Rješenje: C



Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su duljine kateta tih trokuta 1.
Prvi osnovni kvadrat Maja može složiti pomoću dva takva trokuta, a potom će različite kvadrate dobiti pomoću tih osnovnih kvadrata. Neka je n broj trokuta koje može složiti uz jednu stranicu kvadrata. Tada je ukupan broj korištenih trokuta $2n^2$ pa mora vrijediti: $2n^2 \leq 52$, odnosno $n^2 \leq 26$. To znači da je n = 1, 2, 3, 4 ili 5, odnosno na takav način Maja može složiti najviše 5 različitih kvadrata.

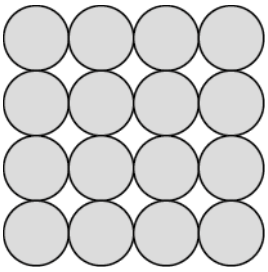


Drugi osnovni kvadrat Maja može složiti pomoću četiri takva trokuta, a potom će različite kvadrate dobiti pomoću tih osnovnih kvadrata. Neka je n broj trokuta koje može složiti uz jednu stranicu kvadrata. Tada je ukupan broj korištenih trokuta $4n^2$ pa mora vrijediti: $4n^2 \leq 52$, odnosno $n^2 \leq 13$. To znači da je n = 1, 2 ili 3, odnosno na takav način Maja može složiti najviše 3 različita kvadrata.



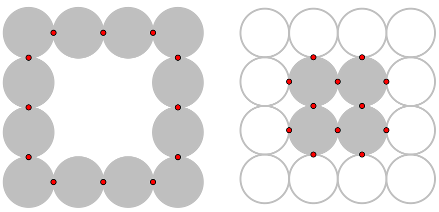
Sada treba provjeriti može li se složiti kvadrat ako se uz jednu stranicu složi određen broj pravokutnih trokuta koji su na stranicu kvadrata prislonjeni katetom i određen broj pravokutnih trokuta koji su prislonjeni hipotenuzom. Neka je n broj trokuta prislonjenih katetom, a m broj trokuta prislonjenih hipotenuzom. Kako je duljina ketete 1, tada je duljina hipotenuze $\sqrt{2}$, a duljina stranice kvadrata je $n+m\sqrt{2}$. Površina kvadrata koji je složila na takav način je $\left(n+m\sqrt{2}\right)^2 = n^2 + 2nm\sqrt{2} + 2m^2$. No, površina jednog pravokutnog trokuta je $\frac{1}{2}$ pa je površina kvadrata racionalan broj. $n^2 + 2nm\sqrt{2} + 2m^2 \in \mathbb{Q}$ ako je $nm = 0$. To znači da je $n = 0$ pa dobijemo drugi osnovni kvadrat, ili je $m = 0$ pa dobijemo prvi osnovni kvadrat.
Dakle, Maja može složiti 5 + 3 = 8 različitih kvadrata.

22. Roč gradi piramidu od metalnih kugli. Kugle su složene tako da je baza 4 x 4 kvadrat, kao što je prikazano na slici. Sljedeći sloj je kvadrat načinjen od 3 x 3 kugle, potom kvadratni sloj od 2 x 2 kugle i na vrhu je još jedna kugla. Na spoju svake dvije kugle nalazi se grumen ljepila. Koliko je ukupno grumena ljepila u toj piramidi?

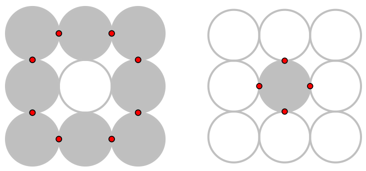


A) 72 B) 85 C) 88 D) 92 E) 96

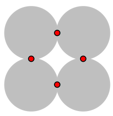
Rješenje: E
Baza piramide sastoji se od 16 metalnih kugli. Na rubu je 12 kugli koje su povezane s 12 grumena ljepila. Svaka kugla koja nije na rubu spojena je s dvije rubne kugle, što je ukupno $2 \cdot 4 = 8$ grumena ljepila, te s 4 grumena ljepila za međusobne spojeve. Ukupan broj grumena ljepila na bazi je 12 + 8 + 4 = 24.



Drugi sloj piramide sastavljen je od 9 metalnih kugli. Na rubu je 8 kugli koje su povezane s 8 grumena ljepila. Kugla koja nije na rubu spojena je s četiri rubne kugle s 4 grumena ljepila. Ukupan broj grumena ljepila na tom je sloju 8 + 4 = 12.



Treći sloj sastavljen je od 4 metalne kugle međusobno povezane s 4 grumena ljepila.



Konačno: svaka kugla gornjeg sloja spojena je s po četiri kugle sloja ispod. To znači da za spajanje drugog sloja i baze treba 9 · 4 = 36 grumena ljepila, za spajanje trećeg i drugog sloja 4 · 4 = 16 grumena ljepila, a za spajanje zadnjeg sloja, koji čini jedna kugla, s trećim slojem trebaju 4 grumena ljepila. Ukupno za spajanje slojeva treba 36 + 16 + 4 = 56 grumena ljepila.
Konačno, ukupno ima 24 + 12 + 4 + 56 = 96 grumena ljepila.

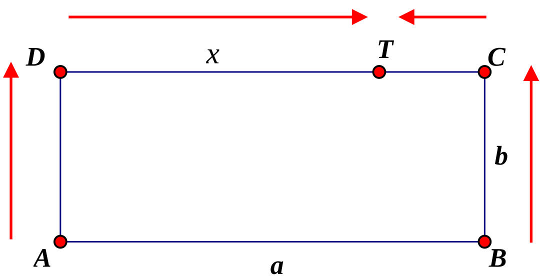
23. Četvero je djece u četiri kuta bazena dimenzije 10 m x 25 m. Trener stoji negdje na jednoj strani bazena. Kada ih je pozvao, troje je djece izašlo iz bazena i najkraćim mogućim putem došlo do njega. Ukupno su prešli 50 m. Koliki je najkraći mogući put koji trener treba prijeći oko bazena da bi došao do četvrtog djeteta?

A) 10 m B) 12 m C) 15 m D) 20 m E) 25 m

Rješenje: D

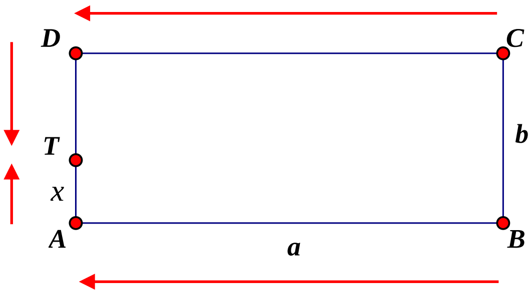
Označimo s *T* položaj trenera, a s *A*, *B*, *C*, *D* položaj djece u bazenu. Trener je mogao stajati na duljoj ili kraćoj strani bazena. Pogledajmo najprije slučaj ako trener stoji na duljoj strani bazena. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da stoji na $\overline{CD}$. Ako je $|DT| = x$, onda je $|CT| = 25 - x$.

Označimo strelicama kretanje djece prema treneru (najkraći mogući put oko bazena).



Troje djece izašlo je iz bazena i krenulo najkraćim putem prema treneru.
Ako su to *A*, *B*, *C*, prešli su 10 + *x* + 10 + 25 – *x* + 25 – *x* = 70 – *x*. Sada je 70 – *x* = 50, odnosno *x* = 20. To znači da je trener trebao prijeći 20 m do četvrtog djeteta *D*.
Ako su to *A*, *B*, *D*, prešli su 10 + *x* + 10 + 25 – *x* + *x* = 45 + *x*. Sada je 45 + *x* = 50, odnosno *x* = 5. To znači da je trener trebao prijeći 25 – 5 = 20 m do četvrtog djeteta *C*.
Ako su to *A*, *D*, *C*, prešli su 10 + *x* + *x* + 25 – *x* = 35 + *x*. Sada je 35 + *x* = 50, odnosno *x* = 15. To znači da je trener trebao prijeći 25 – 15 + 10 = 20 m do četvrtog djeteta *B*.
Ako su to *B*, *C*, *D*, prešli su 10 + 25 – *x* + 25 – *x* + *x* = 60 – *x*. Sada je 60 – *x* = 50, odnosno *x* = 10. To znači da je trener trebao prijeći 10 + 10 = 20 m do četvrtog djeteta *A*.
Bez obzira koje je troje djece izašlo iz bazena, treneru je trebalo 20 m da najkraćim putem dođe do četvrtog djeteta.

Pogledajmo sada slučaj ako trener stoji na kraćoj strani bazena. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da stoji na stranici $\overline{AD}$. Ako je $|AT| = x$, onda je $|DT| = 10 - x$.
Označimo strelicama kretanje djece prema treneru (najkraći mogući put oko bazena).



Troje djece izašlo je iz bazena i krenulo najkraćim putem prema treneru.
Ako su to A, B, C, prešli su $x + 25 + x + 25 + 10 - x = 60 + x$. Sada je $60 + x = 50$, što je nemoguće jer je $x > 0$.
Ako su to A, B, D, prešli su $x + 25 + x + 10 - x = 35 + x$. Sada je $35 + x = 50$, odnosno $x = 15$, što je nemoguće jer je $x < 10$.
Ako su to A, D, C, prešli su $x + 10 - x + 25 + 10 - x = 45 - x$. Sada je $45 - x = 50$, što je nemoguće jer je $x > 0$.
Ako su to B, C, D, prešli su $25 + x + 25 + 10 - x + 10 - x = 70 - x$. Sada je $70 - x = 50$, odnosno $x = 20$, što je nemoguće jer je $x < 10$.
Konačno, trener stoji na duljoj strani bazena, a do djeteta koje je ostalo u bazenu prešao je 20 m.

24. Rečenice pored svakog broja tragovi su za određivanje nepoznatog četveroznamenkastog broja.

4	1	3	2	Dvije su znamenke ispravne, ali su na pogrešnome mjestu.
9	8	2	6	Jedna je znamenka ispravna i na dobrom je mjestu.
5	0	7	9	Dvije su znamenke ispravne, no jedna je na pogrešnome mjestu.
2	7	4	1	Jedna je znamenka ispravna, ali je na pogrešnome mjestu.
7	6	4	2	Niti jedna znamenka nije ispravna.

Koja je zadnja znamenka traženog četveroznamenkastog broja?

A) 0 B) 1 C) 3 D) 5 E) 9

Rješenje: C
S obzirom da 7, 6, 4 i 2 nisu ispravne znamenke, maknimo ih iz ponuđenih brojeva.

	1	3		Dvije su znamenke ispravne, ali su na pogrešnome mjestu.
9	8			Jedna je znamenka ispravna i na dobrom je mjestu.
5	0		9	Dvije su znamenke ispravne, no jedna je na pogrešnome mjestu.
			1	Jedna je znamenka ispravna, ali je na pogrešnome mjestu.

Iz 1. i 4. izjave zaključujemo da 1 može biti na dvije pozicije:

1				ili			1	

Neka je 1 prva znamenka traženoga broja.

1			

		3	

Znamenka je ispravna, ali je na pogrešnome mjestu.

9	8		

Jedna je znamenka ispravna i na dobrom je mjestu.

5	0		9

Dvije su znamenke ispravne, no jedna je na pogrešnome mjestu.

Iz druge izjave zaključujemo da je 8 ispravna znamenka jer je na dobrome mjestu, s obzirom da 9 ne može biti na 1. mjestu. Sada imamo sljedeću situaciju:

1	8		

		3	

Znamenka je ispravna, ali je na pogrešnome mjestu.

5	0		

Dvije su znamenke ispravne, no jedna je na pogrešnome mjestu.

Ova situacija nije moguća jer su ostale tri znamenke koje treba smjestiti na dva mjesta. Dakle, znamenka 1 je na 3. mjestu u traženom broju.

		1	

		3	

Znamenka je ispravna, ali je na pogrešnome mjestu.

9	8		

Jedna je znamenka ispravna i na dobrom je mjestu.

5	0		9

Dvije su znamenke ispravne, no jedna je na pogrešnome mjestu.

Očito je znamenka 9 ispravna jer bi u protivnom bile ispravne znamenke 3, 8, 5 i 0, što je nemoguće jer u traženom broju nedostaju tri znamenke. Dakle, znamenka 9 je na prvome mjestu traženoga broja. Sad možemo prilagoditi treću izjavu pa imamo:

9		1	

		3	

Znamenka je ispravna, ali je na pogrešnome mjestu.

5	0		

Jedna je znamenka ispravna i na dobrom je mjestu.

Kako je u 2. izjavi jedna znamenka ispravna i na dobrom je mjestu, očito je da je to 0. Za znamenku 3 ostaje slobodno zadnje mjesto šifre. Konačno, traženi broj je:

9	0	1	3

Zadnja znamenka traženog broja je 3.

Rezultati natjecanja najbolje plasiranih učenika bit će objavljeni 4. svibnja 2020. godine na internetskoj stranici HMD-a.
Primjedbe učenika na plasman primaju se isključivo elektronskim putem na e-mail klokan@math.hr do 11. svibnja 2020. u 23:59.
Nagrade najboljim učenicima dodjeljivat će se od 21. svibnja 2020. godine.
Obavijesti se mogu dobiti na internetu – **http://www.matematika.hr/klokan/2020/.**