Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu
na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže
zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ)
i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

OBAVEŠTENJE PRETPLATNICIMA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom, s proredom. **Rukopisi se ne vraćaju.**

2. *Matematički list* namenjen je *svim učenicima* IV—VIII raz. osnovne škole. List izlazi 6 puta u toku školske godine i to 1. X, 15. XI, 1. I, 15. II, 1.IV i 25. V.

3. Godišnja pretplata (za svih 6 brojeva) iznosi 60 dinara. Naručiocima za više od 10 kompleta odobravamo rabat (20%, 15%, 10%), zavisno od roka do kojeg se isplati celokupna pretplata (1. XII, 1. III 1. VI). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbine se mogu vršiti samo pismenim putem i šalju se samo neposredno na adresu lista. Novac za sve narudžine se ša'je na **žiro-račun Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije broj 60806-678-10766,** Knez Mihailova 35/IV, sa naznakom za *Matematički list*. Pri tome treba obavezno navesti *tačnu adresu* na koju list treba dostaviti i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi.

Narudžbine na manje od 10 primeraka lista isporučuju se samo po izvršenoj pretplati. Ostale narudžbine treba da budu isplaćene najkasnije na 50 dana po prijemu prve isporučene pošiljke, a u svakom slučaju najkasnije do 31. V 1980. g.

Obaveštenja se mogu dobiti preko telefona redakcije, br. **011-638-263.**

4. Redakcija *Matematičkog lista* raspolaže svima do sada izašlim godištima *Matematičkog lista* osim prvog i drugog godišta i brojeva 1—3 petog godišta. Od ovih godišta prodaju se: godišta III, IV, VI VII i VIII po sniženoj ceni od 20 dinara za komplet, godište V po ceni od 10 dinara i godišta IX, X, XI, XII XIII i XIV po ceni od 30 dinara po kompletu.

Sem toga se od izdanja *Matematičkog lista* mogu dobiti: *Zbirka rešenih zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovne škole* (drugo, dopunjeno izdanje) po ceni od 30 dinara i dodatne sveske *Matematičkog lista* iz prošle tri godine, i to: *Mali rečnik matematičkih termina, Mala zbirka matematičkih zanimljivosti i razni dokazi Pitagorine teoreme*, po ceni od 6 dinara.

5. Mole se poverenici *Matematičkog list* da uzmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728, 11001 Beograd.

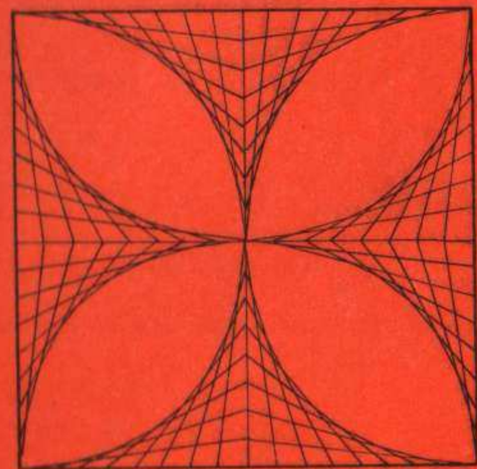
SADRŽAJ

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XV

1



BEOGRAD
1980.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATICARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovnih škola

God. XV, broj 1 (1980)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOM A SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

MATEMATIČKA TAKMIČENJA

XI SAVEZNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

Jedanaesto Savezno takmičenje učenika osnovnih škola održano je 1. juna u Zrenjaninu. Učestvovalo je 34 učenika VII razreda i 42 učenika VIII razreda. Nedostajali su samo učenici sa teritorije SAP Kosovo.

Zadaci su bili na ovom takmičenju izuzetno teški i samo je najbolja učesnica VII razreda uradila svih 5 postavljenih zadataka u predviđenom roku od 120 minuta i osvojila svih 100 poena.

Nagrade za najuspešnije takmičare obezbedio je *Matematički list*, koji je snosio i ostale troškove učesnika takmičenja. Pokrovitelj takmičenja bio je *Naftagas* iz Novog Sada. Svi učesnici i članovi savezne komisije dobili su od *Naftagasa* na poklon lepu kapu, značke i lep, prigodan privezak za ključeve.

Pošto su završili izradu zadataka, učesnici takmičenja i njihovi pratioci, nastavnici i roditelji, obišli su naftonosna polja. Za to vreme komisija je ocenila radove učenika. Pokazalo se da su učenici VII razreda imali više problema sa postavljenim zadacima, nego učenici VIII razreda. Čak su gotovo svi učenici VIII razreda rešili bar trećinu zadataka.

Dobitnici I nagrade, pored knjiga i diploma, dobili su poziv da provedu 10 dana u letovalištu »Šuplja stena«, gde su o trošku *Matematičkog lista* boravili u julskoj Letnjoj školi mladih matematičara Društva matematičara, fizičara i astronoma SRS.

Najviše uspeha imali su sledeći takmičari:

VII RAZRED

Mirjana Spasojević, uč. OŠ »O. Župančič«, Zemun (I nagrada)
Milan Vugdelija, uč. OŠ »B. Radičević«, Beograd (II nagrada)
Marija Pavlović, uč. OŠ »N. Tesla«, Beograd (II nagrada)
Nikola Perin, uč. OŠ »Sutjeska«, Zemun (II nagrada)
Vaska Stevkovska, uč. OŠ »V. Jocić«, Skopje (III nagrada)
Ozren Despić, uč. OŠ »G. Janković«, Blažuj (III nagrada)
Dušan Gorše, uč. OŠ »Zbora ojposlancev«, Kočevje (III nagrada)
Goran Šuković, uč. OŠ »S. Pejanović«, Titograd (III nagrada)
Vesna Papazova, uč. OŠ »P. Zdravkovski«, Skopje (III nagrada)
Olga Bodroža, uč. OŠ »Đ. Jakšić«, Čurug (III nagrada)
Vladislav Butigan, uč. OŠ »V. Karadžić«, Pirot (III nagrada)
Marko Nedeljkov, uč. OŠ »V. Karadžić«, Zrenjanin (pohvala)
Višnja Kosanović, uč. OŠ »A. Mrazović«, Sombor (pohvala)
Urška Gašper, uč. OŠ »R. Iršiča«, Maslinja (pohvala)
Srđan Cvjetović, uč. OŠ »V. Gortan«, Rijeka (pohvala)
Ivan Petrović, uč. OŠ »Učitelj Tasa«, Niš (pohvala)
Deana Paškov, uč. OŠ »V. Pajić-Ožić«, Split (pohvala)
Marija Trajkova, OŠ »Braća Ribar«, Skopje (pohvala)

Mirna Džamonja, uč. OŠ »V. Perić-Valter«, Sarajevo (I nagrada)
Vesna Milošević, uč. OŠ »Heroj Čajka«, Trstenik (I nagrada)
Zoran Petrović, uč. OŠ »J. Pančić«, Beograd (II nagrada)
Aleksandar Marković, uč. OŠ »M. Bursać«, Beograd (II nagrada)
Stanko Gruden, uč. OŠ »Spomenik NOB«, Cerkno (III nagrada)
Žarko Tasev, uč. OŠ »M. Pijade«, Strumica (III nagrada)
Nasiha Dautović, uč. OŠ »R. Kondić«, Kozarac (III nagrada)
Jozef Kratica, uč. OŠ »J. Veselinović«, Beograd (III nagrada)
Zoran Jelaković, uč. OŠ »Zaprešić«, Zaprešić (III nagrada)
Darija Grah, uč. OŠ »F. Vrunč«, Slovenj Gradec (III nagrada)
Julijana Stanišić, uč. OŠ »J. Popović«, S. Mitrovica (III nagrada)
Slobodan Simić, uč. OŠ »A. Mrazović«, Sombor (III nagrada)
Matjaž Kovačec, uč. OŠ »S. Šlander«, Maribor (pohvala)
Josip Budak, uč. OŠ »V. Nazor«, Zagreb (pohvala)
Slađana Đorđević, uč. OŠ »Čegar«, Niš (pohvala)
Vlado Robar, uč. OŠ Videm pri Ptuju (pohvala)
Tatjana Stanoevska, uč. OŠ »B. Miladinović«, Skopje (pohvala)
Indira Galijašević, uč. OŠ »G. Rakovski«, Banja Luka (pohvala)
Ilija Farah, uč. OŠ »J. Jovanović-Zmaj«, S. Mitrovica (pohvala)
Goran Stojanov, uč. OŠ »M. Pijade«, Strumica (pohvala)
Nela Oreč, uč. OŠ »25. novembar«, Posušje (pohvala)
Predrag Matović, uč. OŠ »M. Živojinović«, Mladenovac (pohvala)
Ivica Keglević, uč. OŠ »B. Mažuranić«, Zagreb (pohvala)

ZADACI SA XI SAVEZNOG TAKMIČENJA

VII RAZRED

1. Majka je, krenuvši u kupovinu, imala kod sebe samo novčane bonove u vrijednosti od 15 i 20 dinara. Petinu novca potrošila je na doručak plativši ga sa dva bona, a polovicu preostalog novca dala je za osnovne dnevne namirnice i platila ih je sa tri bona.

Kolika je ukupna novčana vrijednost bonova koje je majka imala kada je krenula od kuće?

2. Realni brojevi a, b, c, d zadovoljavaju ovaj uslov (uvjet):

$$a^2+d^2-2(ab+bc+cd-b^2-c^2)=0.$$

Dokazati da je $a=b=c=d$.

3. Dokazati da je proizvod (produkt) dva uzastopna cijela broja djeljiv s brojem 12, ako je veći od tih brojeva kvadrat nekog prirodnog broja.

4. Dat je proizvoljan četvorougao (četverokut) $ABCD$. Neka su M, N, P, Q, R, S redom središta (polovišta) duži (dužina) AB, BC, CD, DA, AC, BD. Dokazati da se prave (pravci) MP, NQ, RS seku u istoj tački.

5. Dat je pravac (prava) p i točke A i B izvan njega sa iste strane pravca p. Konstruirana je točka C osno simetrična točki A u odnosu na pravac p. Sjecište (presjek) pravaca p i BC je točka D. Neka je E bilo koja točka pravca p, različita od D. Dokazati da je opseg (obim) trokuta (trougla) ABD manji od opsega trokuta ABE.

VIII RAZRED

1. Dokazati da u grupi od 6 učenika postoje bar 3 od kojih svaki poznaje preostala dva, ili postoje bar 3 od kojih svaki ne poznaje nijednog od preostala dva učenika.

2. Dužine (duljine) stranica pravouglog trougla (pravokutnog trokuta) su celi brojevi. Mogu li dužine obeju kateta biti neparni brojevi? Obrazložiti odgovor.

3. Učenik je potrošio izvjesnu sumu novca pri kupovini tašne, knjige i pera. Ako je tašna bila 5 puta jeftinija, pero 2 puta jeftinije, a knjiga 2,5 puta jeftinija nego što je stvarna cijena, tada bi kupovina stajala 160 dinara. Ako bi tašna bila jeftinija 2 puta, pero 4 puta, a knjiga 3 puta, tada bi za takvu kupovinu učenik platio 240 dinara. Koliko je ukupno novca učenik potrošio?

4. Pravougli trougao (pravoukutni trokut) ima katete dužina (duljina) 60 cm i 80 cm. Neka su M i N središta (polovišta) ovih kateta. Kružnica prečnika (promjera) MN seče hipotenuzu u tačkama P i Q. Izračunati dužinu duži (duljinu dužine) PQ.

5. Data je kupa (stožac) sa poluprečnikom (polumjerom) baze dužine (duljine) 3 dm. Nad istom bazom s iste strane konstruisan je valjak čija je površina (oplošje) jednaka površini kupe, a zapremina (volumen) je jednaka zapremini kupe. Izračunati površinu i zapreminu tela koje je presek (zajednički deo) valjka i kupe.

Rešenje zadataka

VII RAZRED

1. Za doručak majka je dala 2 bona, tj. 30 din., 45 din., ili 60 din., a to je petina ukupnog iznosa. Prema uslovu zadatka, za ostale dnevne potrebe dala je dva puta više, tj. 60 din., 90 din. ili 120 din. Kako je ovaj iznos plaćen sa 3 bona, on ne može biti veći od 60 din. Znači, majka je potrošila ukupno 90 din. upravo 30+60, što je tri petine od 150 dinara.

Majka je ponela od kuće bonova u vrednosti od 150 dinara.

2. Dati uslov može se transformisati na sledeći način:

$$a^2+d^2-2ab-2bc-2cd+2b^2+2c^2=a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2cd+d^2=$$

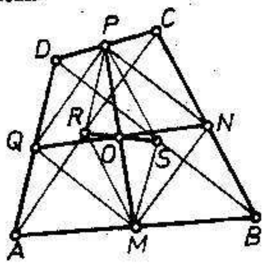
$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2=0.$$

Dobijamo da je zbir tri nenegativna broja jednak nuli (kvadrati realnih brojeva ne mogu biti negativni). To je moguće samo ako je svaki od njih jednak nuli. Tako, iz $a-b=0$, $b-c=0$, $c-d=0$, dobijamo: $a=b$, $b=c$, $c=d$, tj. $a=b=c=d$.

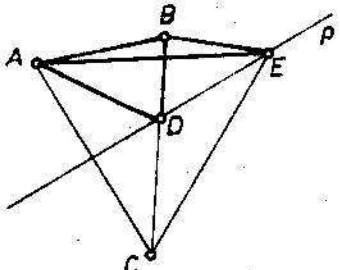
3. Ako je veći broj k^2, tada je proizvod dva uzastopna broja: $k^2(k-1)$. Ovaj proizvod možemo napisati kao $(k-1)k(k+1)k$. Prva tri činioca su uzastopni brojevi, pa jedan od njih mora biti deljiv sa 3 i bar jedan je deljiv sa 2. Ako je k deljivo sa 2, tada je $k \cdot k$ deljivo sa 4, pa je proizvod deljiv sa $4 \cdot 3$, tj. sa 12. Ako je, pak, k deljivo sa 3, tada su $(k-1)$ i $(k+1)$ deljivi sa 2, pa je proizvod deljiv sa $2 \cdot 3 \cdot 2$, a to iznosi 12. Time je tvrdnja dokazana.

4. Uočimo trouglove ABC i ACD. U trouglu ABC je duž MN srednja linija trougla, pa je ona paralelna i jednaka polovini stranice AC. Isto tako, u trouglu ACD je duž PQ srednja linija trougla, pa je i ona paralelna i jednaka polovini stranice AC. Dakle, duži MN i PQ su paralelne i jednake među sobom, pa je četvorougao $MNPQ$

paralelogram i njegove dijagonale MP i NQ se polove. Dokazaćemo da i prava RS sadrži središte O duži MP i NQ (sl. 1). Kao i u prethodnom slučaju, posmatrajući trouglove ABD i ACD, dokazujemo da su duži MS i PR paralelne i jednake među sobom, pa je četvorougao $MSPR$ paralelogram i njegove dijagonale MP i RS polove se. Dakle, tačka O je zajedničko središte duži MP, NQ i RS, odakle proizlazi traženi zaključak.



Sl. 1



Sl. 2

5. Zbog simetričnosti tačaka A i C u odnosu na pravu p je $AD=CD$ i $AE=CE$, pa je obim trougla ABD jednak $AB+BD+AD=AB+BD+DC=AB+BC$, jer, po pretpostavci, tačka D pripada duži BC. Obim trougla ABE je $AB+BE+AE=AB+BE+CE$. Na osnovu osobina trougla znamo da je zbir dve stranice veći od treće stranice. Tako, iz trougla BCE dobijamo nejednakost: $BC<BE+CE$, pa je i $AB+BC<AB+BE+CE$, tj. obim trougla ABD manji je od obima trougla ABE.

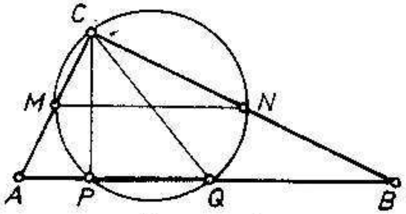
VIII RAZRED

1. Neka je A jedan od ovih učenika. Od preostalih 5 učenika postoje najmanje 3 koji se poznaju sa A, ili postoje najmanje 3 koji se ne poznaju sa A. Pretpostavimo da su to tri poznanika učenika A. Ako se među ovom trojicom nalaze 2 koji se poznaju među sobom, onda oni zajedno sa A čine trojku poznanika. U protivnom, među ovom trojicom svaki ne poznaje nijednog od preostala 2 učenika. Slično zaključujemo ako se ova trojica ne poznaju sa učenikom A.

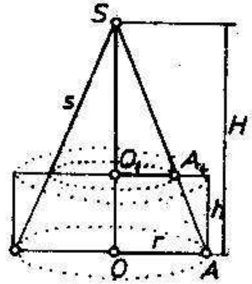
2. Pretpostavimo da su dužine obeju kateta neparni brojevi i označimo ih sa $a=2m+1$ i $b=2n+1$. Prema Pitagorinoj teoremi bilo bi: $c^2=a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4m^2+4m+4n^2+4n+2=4(m^2+m+n^2+n)+2$, tj. c^2 bi bilo deljivo sa 2, ali ne i sa 4. Međutim, ako je c^2 deljivo sa 2, tada mora i c biti deljivo sa 2, a ako je c deljivo sa 2, tada mora biti c^2 deljivo sa 4. Tako dolazimo do protivrečnosti, što potvrđuje da ne mogu dužine obeju kateta biti neparni brojevi.

3. Označimo cenu tašne sa x, cenu pera sa y i cenu knjige sa z. Ta da iz uslova zadatka sledi da važe sledeće jednačine: $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2,5}=160$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=240$. Oslobađanjem od razlomaka dobijamo jednačine: $2x+5y+4z=1\,600$ i $6x+3y+4z=2\,880$. Saberimo ove dve jednačine i dobićemo: $8x+8y+8z=4\,480$, odakle je $x+y+z=560$. Učenik je potrošio ukupno 560 dinara.

4. Dati pravougli trougao ima hipotenuzu AB dužine 100 cm, pa duž MN, kao srednja liniju trougla, ima dužinu 50 cm (sl. 3). Data kružnica sadrži teme C pravog ugla, jer je ugao nad prečnikom prav. Tačka koja je simetrična sa C u odnosu na pravu MN pripada hipotenuzi, i kako je kružnica simetrična u odnosu na svoj prečnik, a duž MN je prečnik date kružnice, to ova tačka pripada kružnici. Zapravo, to je jedna od presečnih tačaka kružnice i hipotenuze, recimo da je to tačka P. Zbog simetrije je duž CP upravna na MN, a samim tim i na AB, pa je ugao CPQ prav. Otuda sledi da je duž CQ prečnik kružnice i da ima dužinu 50 cm. Dužinu duži CP izračunaćemo pomoću površine trougla ABC, jer je to visina koja odgovara hipotenuzi. Dakle: $P=\frac{60\cdot 80}{2}=2\,400$ i $\frac{AB\cdot CP}{2}=2\,400$, odnosno $CP=\frac{4\cdot 800}{100}=48$ cm. Sada u pravouglom trouglu CPQ imamo: $PQ=\sqrt{CQ^2-CP^2}=\sqrt{196}=14$. Dakle, $PQ=14$ cm.



Sl. 3



Sl. 4

5. Iz jednakosti zapremina: $r^2\pi h=\frac{1}{3}r^2\pi H$, dobijamo vezu: $H=3h$, a iz jednakosti površina izlazi: $2r^2\pi+2r\pi h=r^2\pi+r\pi s$, odakle, smenjujući $r=30$ cm, dobijamo: $s=30+2h$. Primenivši Pitagorinu teoremu na pravougli trougao SOA (sl. 3), dobijamo $s^2=r^2+H^2$, odnosno: $(30+2h)^2=900+9h^2$. Sređivanjem dobijamo jednakost $5h^2-120h=0$, koju možemo predstaviti u obliku $5h(h-24)=0$. Rešenje ove jednačine je $h=24$ cm, pa je $H=72$ cm i $s=78$ cm. Treba još izračunati dimenzije kupe čija je visina $SO_1=\frac{2}{3}H=48$ cm. Trouglovi SOA i SO_1A_1 slični su, pa je $O_1A_1=\frac{2}{3}r$, i $SA_1=\frac{2}{3}s$. Tražena zapremina je razlika zapremina dveju kupa: $V=\frac{1}{3}r^2\pi H-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}r\right)^2\pi\cdot\frac{2}{3}H=28\,000\,\pi\ \text{cm}^3=28\,\pi\ \text{dm}^3$.

Površina je jednaka zbiru površina dvaju krugova, uvećanom za razliku omotača dveju kupa:

$$P=r^2\pi+\left(\frac{2}{3}r\right)^2\pi+r\pi s-\frac{2}{3}r\pi\cdot\frac{2}{3}s=2\,600\,\pi\ \text{cm}^2=26\,\pi\ \text{dm}^2.$$

1980. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj