Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ) i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

OBAVEŠTENJE PRETPLATNICIMA

1. Uredništvo poziva nastavnike i profesore matematike kao i ostale čitaoce da šalju svoje priloge za list: članke, odabrane zadatke, zadatke sa prijemnih ispita i matematičkih takmičenja, razne zanimljivosti. Poželjno je da svi rukopisi (osim učeničkih rešenja zadataka) budu pisani pisaćom mašinom, s proredom. **Rukopisi se ne vraćaju.**

2. *Matematički list* namenjen je *svim učenicima* IV—VIII raz. osnovne škole. List izlazi 6 puta u toku školske godine i to 1. X, 15. XI, 1. I, 15. II, 1. IV i 31. V.

3. Godišnja pretplata (za svih 6 brojeva) iznosi 90 dinara. Naručiocima za više od 10 kompleta odobravamo rabat (20%, 15%, 10%), zavisno od roka do kojeg se isplati celokupna pretplata (1. XII, 1. III, 1. VI). Nikakvi drugi odbici ne uvažavaju se.

Narudžbine se mogu vršiti samo pismenim putem i šalju se samo neposredno na adresu lista. Novac za sve narudžbine se šalje na **žiro-račun Društva matematičara, fizičara i astronoma SR Srbije broj 60806-678-10766,** Knez Mihailova 35/IV, sa naznakom za *Matematički list*. Pri tome treba obavezno navesti *tačnu adresu* na koju list treba dostaviti i jasno naznačiti na šta se narudžbina odnosno uplata odnosi.

Narudžbine na manje od 10 primeraka lista isporučuju se samo po izvršenoj pretplati. Ostale narudžbine treba da budu isplaćene najkasnije na **90 dana** po prijemu prve isporučene pošiljke, a u svakom slučaju najkasnije do 31. V 1982. g.

Obaveštenja se mogu dobiti preko telefona redakcije br. **011-638-263.**

4. Redakcija *Matematičkog lista* raspolaže svima do sada izašlim godištima *Matematičkog lista* osim prvog, drugog i petog godišta. Od ovih godišta prodaju se: godišta III, IV, VI, VII i VIII po sniženoj ceni od 25 dinara za komplet i godišta IX, X, XI, XII, XIII, XIV i XV po ceni od 40 dinara po kompletu.

Sem toga se od izdanja *Matematičkog lista* mogu dobiti: *Zbirka rešenih zadataka sa matematičkih takmičenja učenika osnovne škole* (drugo, dopunjeno izdanje) po ceni od 40 dinara i dodatne sveske *Matematičkog lista* iz prošle 4 godine, i to: *Matematičke tablice, Mali rečnik matematičkih termina, Mala zbirka matematičkih zanimljivosti i Razni dokazi Pitagorine teoreme*, po ceni od 8 dinara.

5. Mole se poverioci *Matematičkog lista* da izmire sva zaostala dugovanja.

6. Sve priloge, primedbe i narudžbe slati *isključivo* na adresu:

Matematički list, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728, 11001 Beograd.

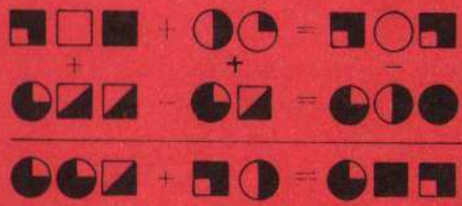
SADRŽAJ

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XVI

1



BEOGRAD
1981.

1981. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovnih škola

God. XVI, broj 1 (1981)

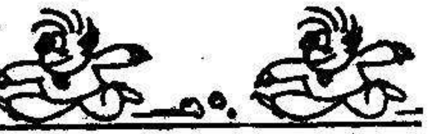
Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA
SR SRBIJE
Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

Oslođeno plaćanja poreza na promet na osnovu rešenja Republičkog sekretarijata
za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

MATEMATIČKA TAKMIČENJA



XI SAVEZNO TAKMIČENJE IZ MATEMATIKE ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

Posle 7 godina Savezno takmičenje mladih matematičara ponovo je održano u SR Bosni i Hercegovini, u živopisnom mestu Pale, nedaleko od Sarajeva. Učestvovao je rekordan broj učenika, ukupno 85, i to 33 učenika VII i 52 učenika VIII razreda. Prvi put na Saveznom takmičenju učestvovali su i učenici sa Kosova. Ovo takmičenje biće zabeleženo i po velikom uspehu učenika VII razreda iz SR Slovenije. Savezna komisija za sprovođenje takmičenja zauzela je ovoga puta stanovište da zadaci budu teži nego obično. Ipak, bilo je učenika sa osvojenih svih 100 poena. Po ustaljenoj tradiciji, učenici su rešavali po 5 zadataka, a svaki tačno urađen zadatak vredeo je 20 poena. Posle 120 minuta rada, takmičari su predali radove na ocenjivanje, a onda su otišli u obilazak Sarajeva.

Svi učesnici takmičenja dobili su priznanje, a najbolji su dobili diplome i nagrade od organizatora takmičenja, *Matematičkog lista za učenike osnovne škole.* Nagrađeni su i pohvaljeni sledeći učenici.

VII RAZRED

Jože Fabčič, uč. OŠ »D. Bajc«, Vipava (I nagrada)
Mojca Indihar, uč. OŠ »S. R. Stane«, Maribor (I nagrada)
Vladimir Dragović, uč. OŠ »Starina Novak«, Beograd (II nagrada)
Beno Rola, uč. OŠ »S. R. Stane«, Maribor (II nagrada)
Krešimir Segarić, uč. OŠ »P. Preradović«, Zagreb (II nagrada)
Damjana Kokol, uč. OŠ »P. Kavčič«, Škofja Loka (III nagrada)
Matevž Kranjec, uč. OŠ »P. Voranc«, Ljubljana (III nagrada)
Boban Nikolić, uč. OŠ »21. maj«, Niš (III nagrada)
Vera Kojić, uč. OŠ »M. Kosovac«, Šabac (III nagrada)
Goran Kunovski, uč. OŠ »P. Preradović«, Zagreb (III nagrada)
Ziba Dautović, uč. OŠ »R. Kondić«, Kozarac (pohvala)
Siniša Vuković, uč. OŠ »21. maj«, Niš (pohvala)
Mladen Radović, uč. OŠ »O. Galović«, Nikšić (pohvala)
Saša Milenković, uč. OŠ »Lj. Radosavljević«, Zaječar (pohvala)

VIII RAZRED

Mirjana Spasojević, uč. OŠ »O. Župančič«, Zemun (I nagrada)
Olga Bodroža, uč. OŠ »Đ. Jakšić«, Čurug (II nagrada)
Bratislav Iričanin, uč. OŠ »J. B. Tito«, Beograd (II nagrada)
Roman Drnovšek, uč. OŠ »G. Golar«, Škofja Loka (II nagrada)
Nikola Perin, uč. OŠ »Sutjeska«, Zemun (II nagrada)
Milan Vugdelija, uč. OŠ »B. Radičević«, Beograd (III nagrada)
Nenad Ristić, uč. OŠ »Karađorđe«, Topola (III nagrada)
Sven Pavlahović, uč. OŠ »V. Vlahović«, V. Gorica (III uagrada)
Milan Kostić, uč. OŠ »8. septembar«, Pirot (III nagrada)
Marko Koselj, uč. OŠ »Gor. odred«, Žirovnica (pohvala)
Jelena Popović, uč. OŠ »A. Savčić«, Valjevo (pohvala)
Mirko Spasojević, uč. OŠ »F. Rezač«, Tuzla (pohvala)
Goran Jecić, uč. OŠ »R. Domanović«, Kragujevac (pohvala)

1981. - savezno natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

Jane Kondev, uč. OŠ »B. Radičević«, Beograd (pohvala)
Tesi Blasizzo, uč. OŠ Postojna (pohvala)
Gorica Milutinović, uč. OŠ »S. Penezić Krcun«, Počekoviua (pohvala)
Ana Marković, uč. OŠ »M. Čajetinac Čajka«, Trstenik (pohvala)

ZADACI SA XII. SAVEZNOG TAKMIČENJA

VII RAZRED

1. Odrediti nepoznatu cifru (znamenku) jedinica broja 4 01512*, tako da ostaci dijeljenja ovog broja sa 3 i sa 5 budu jednaki.

2. U nepunoj posudi nalazi se 85-procentni rastvor (otopina) alkohola. Ako posudu dopunimo do vrha 21-procentnim rastvorom alkohola, sve to dobro promiješamo, odlijemo onoliko tečnosti koliko smo dolili, pa posudu opet dopunimo do vrha 21-procentnim rastvorom alkohola, dobićemo rastvor koji sadrži 70% alkohola. Koliki deo posude je bio ispunjen prije dolijevanja?

3. Prema najnovijem popisu stanovništva, u 5990 naselja SR Slovenije živi 1 883 764 stanovnika. Dokazati da postoje bar dva naselja u Sloveniji s jednakim brojem stanovnika.

4. U trouglu (trokutu) ABC je $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}=c$, gde su h_a, h_b, h_c dužine (duljine) visina i c dužina jedne stranice trougla. Izračunati jedan od uglova (kuteva) tog trougla.

5. Neka su A, B i C točke u ravnini (ravni) takve da je za svaku točku M te ravnine ispunjen bar jedan od slijedeća dva uvjeta (uslova): (1) $d(A, M) \leq d(B, M)$ i (2) $d(A, M) \leq d(C, M)$. Sa $d(A, M)$ označeno je rastojanje između točaka A i M. Dokazati da točka A pripada dužini (duži) BC.

VIII RAZRED

1. Baza uspravne prizme je kvadrat stranice a. Dužina (duljina) stranice a dva puta je veća od dužine visine prizme. Mjerni brojevi površine i zapremine (oplošja i volumena) prizme jednaki su. Odrediti dužine ivica (bridova) ove prizme.

2. Brojevi od 1 do 10 napisani su u jednom redu u bilo kojem redoslijedu. Prema tom redoslijedu svakom broju pridružen je njegov redni broj. Zatim je svaki broj sabran (zbrojen) sa svojim rednim brojem. Na taj način dobija se deset zbirova. Dokazati da su cifre (znamenke) jedinica kod bar dva zbira (zbroja) jednake među sobom.

3. Dva voza (vlaka) istovremeno polaze iz mjesta A i B u susret jedan drugom. Svaki od njih, čim stigne u suprotno mjesto, odmah se vraća nazad. Prvo susretanje vozova dešava se na 50 km od mjesta A, a drugo na 30 km od mjesta B. Kolika je udaljenost između mjesta A i B? (Pretpostavlja se da su brzine kojima se kreću vozovi stalne).

4. Na stranici AC trokuta (trougla) ABC uočimo točku K koja dijeli AC u omjeru (razmeri) 1 : 3, a na stranici BC točku L koja dijeli BC u omjeru 1 : 4. Neka je točka M sjecište (presek) dužina (duži) AL i BK. Odrediti omjer duljina KM i MB.

5. Dijagonale proizvoljnog trapeza dele trapez na četiri trougla (trokuta). Površine (ploštine) trouglova kojima pripadaju osnovice iznose P_1 i P_2. Izraziti površinu P trapeza pomoću P_1 i P_2.

Rešenja zadataka

VII RAZRED

1. Nepoznata cifra može biti 5, 6 ili 7. Deljenjem dobijenog broja sa 3 i sa 5, uverićemo se da je u prvom slučaju taj broj deljiv i sa 3 i sa 5, u drugom slučaju ostaci deljenja sa 3 i 5 su 1, a u poslednjem slučaju ostaci deljenja sa 3 i sa 5 su 2.

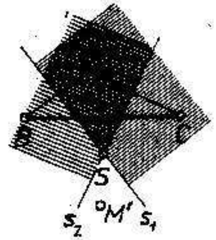
2. Označimo sa x, $x<1$, deo posude koji je u početku bio ispunjen 85-procentnim rastvorom alkohola. Broj procenata (stotih delova) alkohola u posudi iznosi $85x$. Neispunjeni deo posude iznosi $1-x$. Prvim dosipanjem količina alkohola u posudi povećana je za $21(1-x)$ i iznosi ukupno $85x+21(1-x)=21+64x$. Odlivanjem dela $(1-x)$ tečnosti, količina alkohola u posudi smanjila se za $(1-x)(21+64x)$. Drugim dolivanjem 21-procentnog rastvora ponovo smo povećali količinu alkohola za $21(1-x)$. Dobijeni rastvor sadrži 70 stotih delova alkohola. Iz svega ovoga dobijamo jednakost: $21+64x-(1-x)(21+64x)=70$. Sređivanjem leve strane jednakosti dobijamo: $21+64x^2=70$, a odavde je $64x^2=49$. Rešenje ove jednačine je $x=\frac{7}{8}$. Pre dolivanja bilo je ispunjeno $\frac{7}{8}$ posude.

3. Kad bi u svim naseljima bio različit broj stanovnika, tada bi najmanji mogući ukupan broj stanovnika iznosio:

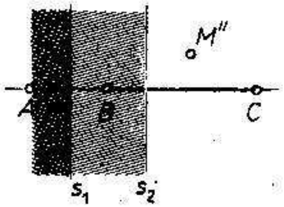
$1+2+3+\ldots+5988+5989+5990$. Kako je $1+5990=2+5989=3+5988=\ldots=5991$ i kako ovih zbirova ima $\frac{5990}{2}=2995$, to će ukupan zbir iznositi $2995 \cdot 5991=17\,943\,055$. Dakle, ako bi sva naselja u Sloveniji imala različit broj stanovnika, tada bi cela Slovenija imala najmanje 17 943 055 stanovnika, što je preko 20 puta više od stvarnog broja. Otuda zaključujemo da postoje bar dva naselja sa jednakim brojem stanovnika.

4. Iz date jednakosti dobijamo: $h_a \cdot h_b=ch_c$, odnosno $\frac{h_a \cdot h_b}{2}=\frac{c \cdot h_c}{2}$. Kako je $\frac{c \cdot h_c}{2}=P$, gde je P površina trougla, izlazi da je: $\frac{h_a \cdot h_b}{2}=P$. Osim toga je $P=\frac{a \cdot h_a}{2}=\frac{b \cdot h_b}{2}$. Dakle: $\frac{h_a \cdot h_b}{2}=\frac{a \cdot h_a}{2}$ i $\frac{h_a \cdot h_b}{2}=\frac{b \cdot h_b}{2}$, pa izlazi da je $h_b=a$ i i $h_a=b$. Drugim rečima, stranice a i b su jedna drugoj odgovarajuće visine, tj. dati trougao je pravougli, a ugao zahvaćen stranicama a i b je prav.

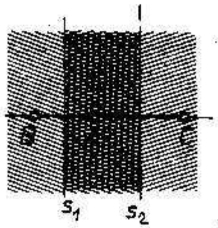
5. Pretpostavimo da je tačka A van prave BC. Skup svih tačaka M koje zadovoljavaju uslov (1) predstavljaju poluravan, određenu simetralom s_1 duži AB, osenčenu na sl. 1. Slično, skup svih tačaka koje zadovoljavaju uslov (2), predstavljaju poluravan određenu simetralom s_2 duži AC, takođe osenčenu na sl. 1. Tada tačke unutar ugla s_1Ss_2, kao na slici tačka M', ne bi zadovoljavale ni jedan od uslova (1) i (2). Međutim, po uslovu zadatka, ovakve tačke ne postoje u našoj ravni, tj. ne postoji ugao s_1Ss_2. Ovaj ugao postoji samo kada se simetrale s_1 i s_2 seku. Otuda sledi da se ove simetrale ne mogu seći, što je moguće jedino ako tačka A pripada pravoj BC. Tada, ako tačka A ne pripada duži BC, postojaće tačke, kao tačka M'' na sl. 2, koje ne zadovoljavaju ni jedan od uslova (1) i (2). Ako je, pak, tačka A na duži BC, tada svaka tačka M ravni zadovoljava uslov (1) ili uslov (2). Time je dokazano da tačka A mora pripadati duži BC.



Sl. 1



Sl. 2



Sl. 3

VIII RAZRED

1. Visina prizme je $h=\frac{1}{2}a$. Površina prizme je $P=2a^2+4ah=2a^2+2a^2=4a^2$, a zapremina je $V=a^2\cdot h=\frac{1}{2}a^3$. Iz jednakosti površine sa zapreminom, imamo: $\frac{1}{2}a^3=4a^2$, odakle, posle množenja sa $\frac{2}{a^2}$, $a\neq 0$, dobijamo: $a=8$. Samim tim je $h=4$.

2. Neka je svaki broj sabran sa svojim rednim brojem. Tada imamo deset zbirova. Ako svih deset dobijenih zbirova saberemo, tada će njihov ukupan zbir biti: $2(1+2+3+\ldots+8+9+10)=2\cdot 55=110$.

Ako bi se ovih deset zbirova završavalo različitim ciframa, onda bi te krajnje cifre bile: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. U tom slučaju, pri sabiranju svih ovih zbirova, na mestu jedinica u ukupnom zbiru, zbog $0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=$ $=45$, biće cifra 55. Međutim, videli smo da ukupan zbir iznosi 110, pa dolazimo do protivrečnosti. Otuda sledi da bar dva od ovih deset zbirova imaju jednake krajnje cifre.

3. Neka rastojanje od A do B iznosi s. Označimo sa V_a brzinu voza koji polazi iz mesta A, a sa t vreme od polaska do prvog susreta sa prvim vozom. Za vreme t prvi voz je prešao put od 50 km, tj. $V_A\cdot t=50$. Oba voza zajedno prešli su relaciju od A do B jedanput. (Na slici 4 put koji je prešao prvi voz je AC, put koji je prešao drugi voz je BC, a ukupno su prešli $AC+BC=AB=s$). Do sledećeg susreta oba voza su zajedno prešla put dužine $3s$. To se jasno vidi na sl. 5:

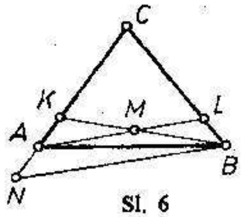
Sl. 4

Sl. 5

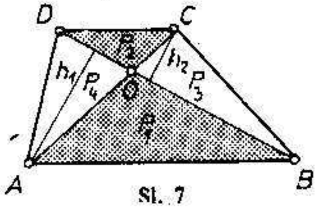
prvi voz je prešao put $AB+BD$, a drugi $BA+AD$. Kako je $BD+AD=s=AB$, to je $AB+BD+BA+AD=3s$. Prema uslovu brzine vozova su ravnomerne, pa je za prelaženje tri puta dužeg puta potrebno 3 puta više vremena. Stoga je prvi voz do drugog susreta prešao put $V_A\cdot 3t$, odnosno: $3V_At=s+30$. Zamenjujući $V_At=50$, dobijamo: $150=s+30$, odakle je $s=120$. Dakle, udaljenost od A do B iznosi 120 km.

4. Produžimo duž CA preko A. Neka je N tačka preseka prave AC i prave kroz B, paralelne pravoj AL. Tada je, prema Talesovoj teoremi, $\frac{AN}{AC}=\frac{BL}{CL}=\frac{1}{4}$.

Dakle: $AN=\frac{1}{5}AC$. Kako je i $AK=\frac{1}{4}AC$, sledi da je $AN=AK$, tj. tačka A je središte duži KN (sl. 6). U trouglu BNK je prava AM paralelna stranici BN, pa pošto ta prava polovi stranicu KN, ona mora poloviti i stranicu BK. Dakle $KM : MB=1 : 1$.



Sl. 6



Sl. 7

5. Neka je O presečna tačka dijagonala. Dokazaćemo najpre da su površine trouglova ADO i BCO jednake među sobom, tj., prema sl. 7, da je $P_3=P_4$. Zaista, trouglovi ABD i ABC imaju zajedničku osnovicu AB i jednake visine (visina trapeza). Dakle: $P_1+P_4=P_1+P_3$, pa je $P_3=P_4$.

Trouglovi ABO i ADO imaju osnovice BO i OD i zajedničku visinu h_1 iz temena A, pa je $P_1=\frac{1}{2}BOh_1$, i $P_3=\frac{1}{2}DOh_1$, odnosno $P_1 : P_3=BO : DO$. Slično dobijamo odnos površina trouglova BCO i DCO : $P_4 : P_2=BO : DO$, a kako je $P_4=P_3$, biće $P_3 : P_2=BO : DO$. Izlazi da je $P_1 : P_3=P_3 : P_2$, odakle je $P_3^2=P_1\cdot P_2$, ili $P_3=\sqrt{P_1P_2}$.

Kako je površina trapeza $P=P_1+P_2+2P_3$, biće konačno: $P=P_1+P_2+$ $+2\sqrt{P_1P_2}$, ili $P=(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2})^2$.

OBAVEŠTENJE

Zbog velikog povećanja troškova oko štampanja i ekspedicije lista prinuđeni smo da godišnju pretplatu na Matematički list za ovu školsku godinu povećamo na 90 dinara.

Matematički list se izdržava isključivo od uplata svojih pretplatnika i nema drugih mogućnosti za obezbeđenje svog redovnog izlaženja.

Stoga molimo naše pretplatnike da prihvate ovaj naš zahtev i da, u cilju omogućavanja što kvalitetnijeg načina izdavanja ovog lista, po mogućnosti doprinesu i povećavanju broja pretplatnika.

Uredništvo