XIII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1982. godina

VII RAZRED

1. Učenici A, B, C, D su se takmičili u trčanju. Svaki od njih je prognozirao redosljed na cilju trke. Učenik A: ABDC; učenik B: BACD; učenik C: CBDA; učenik D: DCBA. Poslije takmičenja pokazalo se da nitko nije točno prognozirao redosljed svih takmičara na cilju, već je samo jedan od njih pogodio mjesto samo jednog od takmičara. Kakav je bio redosljed na cilju trke?

2. Odrediti ostatak dijeljenja broja 3^{100} sa 13.

3. Dane su tri točke M, N i O koje ne pripadaju jednom pravcu. Konstruirati kvadrat ABCD, tako da točka M pripada pravcu AB, točka N pripada pravcu CD i točka O je presječena točka dijagonala.

4. U šiljastokutnom trokutu ABC nožišta (podnožja) visina su vrhovi trokuta DEF. Dokazati da su visine trokuta ABC ujedno simetrale kutova trokuta DEF.

5. U danom četverokutu tri kuta su tupa. Dokazati da je veća ona dijagonala koja sadrži vrh šiljastog kuta.

XIII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1982. godina

VIII RAZRED

1. Prednja guma motocikla istroši se poslije prijeđenih 25 000 km, a zadnja poslije 15 000 km. Poslije koliko pređenih kilometara treba promijeniti mjesta gumama da bi se obje istovremeno istrošile? Posle koliko pređenih kilometra motociklista mora uzeti nove gume?

2. (A) Izračunati: $(a-b)(a^4+a^3b+a^2\,b^2+ab^3+b^4)=...$

   (B) Koristeći se jednakošću dobijenom pod (A), odrediti prost broj p, takav da je $2p^2+1=k^5$, gdje je k prirodan broj.

3. Dokazati da je u svakom trokutu ABC udaljenost presjeka visina (ortocentra) od vrha A dva puta veća od udaljenosti središta opisane kružnice od stranice BC tog trokuta.

4. U trapezu ABCD je AB=12, BC=7, CD=8, kut ABC je pravi. Da li simetrala unutrašnjeg kuta DAB siječe krak BC ili osnovicu CD? Odgovor obrazložiti.

5. Dokazati da u svakom trokutu ABC vrijedi formula:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{\rho}$$

gdje su h_a,h_b,h_c visine, a ρ polumjer upisane kružnice trokuta.

Rješenja zadataka

XIII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1982. godina

VII RAZRED

1. Zapišimo dane prognoze u obliku kvadratne tablice:

A: ABCD
B: BACD
C: CBDA
D: DCBA

Sva četiri učenika su različito prognozirala pobjednika trke, što znači da je neko od njih sigurno pogodio tko je prvi. Samim tim, zaključujemo prema uvjetima zadataka, da niko nije pogodio redoslijed ostalih takmičara. Iz kvadratne tablice vidimo da nitko nije predvidio da će učenik D zauzeti 2. mjesto, niti da će učenik A zauzeti 3. mjesto, niti da će učenik B zauzeti 4. mjesto. Dakle, prvi je bio učenik C, i on je jedino pogodio svoju pobjedu. Redoslijed ostalih bio je: CDAB.

2. Uočimo da je $3^3=27=2\cdot 13+1$. Zapišimo to ovako:$3^3=13k+1$. Dalje imamo: $3^3\cdot 3^3=(13k+1)^2 = 169k^2+26k+1=13(13k^2+2k)+1=13m+1$. Zatim: $3^3\cdot 3^3\cdot 3^3= (13m+1)(13k+1)= 169km+13m+13k+1= 13(13km+m+k)+1=13n+1$, itd. Daljim množenjem s 3^3 uvijek ćemo dobiti broj koji pri dijeljenju sa 13 daje ostatak 1. Zbog toga je $3^{99}=(3^3)^{33}=13p+1$. Konačno: $3^{100}=3^{99}*3=(13p+1)\cdot 3=13(3p)+3$. Dakle, ostatak dijeljenja broja 3^{100} sa 13 je 3.

3. Paralelne pravci AB i CD su centralnosimetrični u odnosu na tačku O (sl.1.). Zbog toga tačka M_1, koja je simetrična sa M, pripada pravcu CD, a tačka N_1, koja je simetrična sa N, pripada pravcu AB.
Koristeći se točkama M_1 i N_1 možemo konstruirati pravce AB i CD (pravac AB određen je točkama M i N_1, a pravac CD točkama N i M_1). Dalja konstrukcija kvadrata Može se izvesti na razne načine. Na sl. 2 konstruirana je normalna OP na praac CD. Dužina OP jednaka je polovini stranice kvadrata. To je iskorišteno za konstruiranje vrhova A,B,C,D.

4. Dokažimo na primjer, da je pravac AD simetrala kuta EDF (sl.3). Kutovi AEB i ADB su pravi, pa kružnica k_1, promjera AB, prolazi kroz točke E i D (kut nad promjerom je prav). Zbog toga su jednaki među sobom kutovi ADE i ABE (kutovi nad istim lukom). Slično, kružnica k_2, promjera AC, sadrži točke D i F i kutovi ADF i ACF su jednaki među sobom. Osim toga, zbog $BE \perp AC$ i $CF \perp AB$, slijedi da je $\measuredangle ABE = \measuredangle ACF$ (kao kutovi s okomitim kracima). Otuda izlazi da je i $\measuredangle ADF = \measuredangle ADE$, što znači da je i pravac AD simetrala kuta EDF.
Slično dokazujemo da su BE i CF simetrale kutova kod vrhova E i F.

5. Neka je kut AC (sl.4.) šiljasti. Konstruirajmo kružnicu promjera AC. Dokazat ćemo da vrh D tupog kuta mora biti u krugu. Na kružnici ne može biti jer bi tada kut ADC bio prav. Ako bi točka D bila van kruga, kao tačka D' na sl.4, tada bi trokut CED', bio pravokutni, pa bi kut AD´C bio šiljast. Dakle,jedino je moguće da se točka D nalazi u krugu. Slično dokazujemo da je točka B u krugu. Zbog toga je dijagonala BD u krugu samim tim manja od promjera AC,a to se i tvrdilo.

Rješenja zadataka

XIII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1982. godina

VIII RAZRED

1. Da bi se gume jednako istrošile, moraju se voziti isti broj kilometara na prednjem i zadnjem kotaču. Pretpostavimo da svaka guma pređe x km na prednjem i x km na zadnjem kotaču, dok se sasvim istroši. Nepoznanica x tada zadovoljava uvjet: $\frac{1}{25000}+\frac{1}{15000}=\frac{1}{x}$. Odavde je x= 9375 km. Motociklista će promijeniti mjesta gumama poslije 9375 km vožnje, a poslije 18750 km mora uzeti nove gume.

2. (A) $(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$.
(B) Iz $2p+1=k^5$, dobivamo: $2p^2=k^5-1$, odakle primjenom jednakosti iz (A) izlazi $2p^2=(k-1)(k^4+k^3+k^2+k+1)$. Kako je $2p^2+1=k^5$, izlazi da je k^5 , a samim tim i k, neparan broj, recimo k=2n+1 i k>1, n je prirodan broj. Sada dobivamo: $2p^2=2n(k^4+k^3+k^2+k+1)$ i poslije skraćivanja sa 2: $p^2=n(k^4+k^3+k^2+k+1)$. Kako je p prost broj, posljednja jednakost je moguća samo ako je n=1, ili $n=k^4+k^3+k^2+k+1$. Zbog k=2n+1, tj. k>n, nije moguće $n=k^4+k^3+k^2+k+1$. Ostaje, dakle, n=1, a tada je k=3. Zamijenimo k=3 i dobit ćemo: $p^2=3^4+3^3+3^2+3+1=121$. Traženi prost broj je p=11.

3. Neka je H ortocentar, O središte opisne kružnice,A_1 i B_1 središta stranica BC i AC (sl.5). Dužina A_1B_1 je središnjica trokuta ABC i samim tim je paralelna i jednaka polovini stranice AB. Trokuti ABH i A_1B_1O imaju odgovarajuće kutove s paralelnim kracima, dakle, imaju jednake kutove, pa su slični. Kako je koeficijent sličnosti 2, to je stranica AH trokuta ABH dva puta veća od odgovarajuće stranice trokuta A_1B_1O, a to se i tvrdilo.

4. Neka je C´ točka u kojoj simetrala kuta DAB siječe pravac DC. Ako je DC´<DC, tada simetrala siječe osnovicu CD. Izračunajmo duljinu dužine DC'. Kutovi BAC´ i DAC´ jednaki po pretpostavci.Međutim, kutovi BAC´ i DC´A jednaki su kao naizmenični kutovi između dva paralelna pravca (sl. 6). Zbog toga su jednaki među sobom kutovi DAC´ i DC´A, pa je trokut ADC´ jednakokračan i DC´=AD.
Duljinu dužine AD izračunat ćemo iz pravokutnog trokuta AED, gde je E podnožje visine iz D na AB: DC´=AD=$\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$>8. Dakle, dužina DC´ je veća od osnovice CD, pa simetrala kuta BAD siječe krak BC.

5. Prema sl.7 vidimo da je površina trokuta ABC jednaka zbroju površina trokuta ABO, BCO i CAO. Visina svakog od ova tri trokuta je polumjer ρ upisane kružnice. Dakle:
$\frac{1}{2}a\rho+\frac{1}{2}b\rho+\frac{1}{2}c\rho=P$, a odavde poslije dijeljenja s P dobivamo: $\frac{a\rho}{2P}+\frac{b\rho}{2P}+\frac{c\rho}{2P}=1$.
Međutim, iz $P=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ dobivamo $2P=ah_a=bh_b=ch_c$. Zamijenom dobivamo

$\frac{a\rho}{ah_a}+\frac{b\rho}{bh_b}+\frac{c\rho}{ch_c}=1$, odnosno $\frac{\rho}{h_a}+\frac{\rho}{h_b}+\frac{\rho}{h_c}=1$. Ako posljednju jednakost podijelimo s ρ, dobit ćemo $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{\rho}$, a to je tražena jednakost.