Zahvaljujem Društvu matematičara Srbije (http://www.dms.org.rs/) i njegovom predsjedniku dr. Zoranu Kadelburgu
na dopuštenju da iz časopisa "Matematički list za učenike osnovne škole" skeniram stranice koje sadrže
zadatke i rješenja s republičkih natjecanja (SR Hrvatke) i saveznih natjecanja (SFRJ)
i skenove objavim na web stranici http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate/

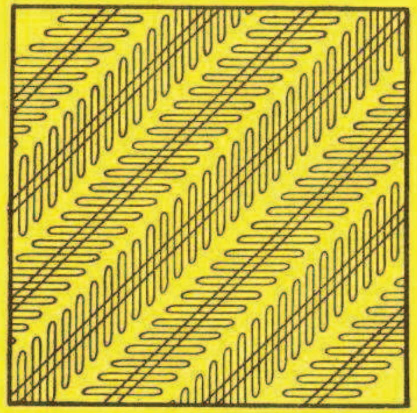
66

MATEMATIČKI LIST

ZA UČENIKE OSNOVNE ŠKOLE

XVIII

1



BEOGRAD
1983.

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA, FIZIČARA I ASTRONOMA JUGOSLAVIJE

MATEMATIČKI LIST

za učenike osnovne škole

God. XVIII, broj 1 (1983)

Izlazi šest puta godišnje

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA SR SRBIJE

Beograd, Knez Mihailova 35/IV, p. p. 728.

Oslobođeno plaćanja poreza na promet na osnovu resenja Republičkog sekretarijata za kulturu SR Srbije br. 413-186-03 od 11. 1. 1973. godine

Štampa: Beogradski izdavačko-grafički zavod, Beograd, Bul. vojvode Mišića br. 17

1983. - republičko natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

ZADACI SA REPUBLIČKOG NATJECANJA UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA SR HRVATSKE

(Natjecatelji su rješavali zadatke u dvije skupine. Prva skupina je sadržavala elementarne zadatke koje ovdje nećemo navoditi.)

VII RAZRED

1. Dokaži ovu tvrdnju: ako se u unutrašnjosti jednakostraničnog trokuta odabere bilo koja točka, tada je zbroj udaljenosti od te točke do stranica trokuta jednak visini trokuta.

2. Da li postoji takav prirodni broj koji ima ovo svojstvo: ako se prva znamenka izbriše i dopiše iza poslednje znamenke, tada je novi broj pet puta veći od starog (početnog)?

3. Ima li više onih četveroznamenkastih brojeva koji se mogu prikazati kao umnožak dvaju dvoznamenkastih brojeva ili onih koji se ne mogu tako prikazati?

4. Dokazati da je u pravokutnom trokutu simetrala pravog kuta također i simetrala kuta što ga čine težišnica i visina iz vrha pravog kuta.

VIII RAZRED

1. Ima li više onih četveroznamenkastih brojeva koji se mogu prikazati kao umnožak dvaju dvoznamenkastih brojeva ili onih koji se ne mogu tako prikazati?

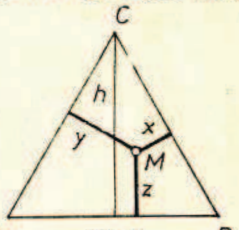
2. Zadan je trapez $ABCD$ s paralelnim stranicama AB i CD. Izračunaj opseg tog trapeza ako je poznato da je dijagonala BD okomita na stranicu AB, da dijagonala AC raspolavlja kut DAB, te da se dijagonale sijeku u točki S tako da je $d(B, S)=1$, $d(S, D)=2$.

3. Odredi sve parove prirodnih brojeva za koje je razlika između njihovog najmanjeg zajedničkog višekratnika i najveće zajedničke mjere jednaka 30.

4. Dvije kružnice čiji se polumjeri odnose kao $1:3$ dodiruju se izvana. Izrazi ploštinu lika kojeg zatvaraju zajednička tangenta i kružnice pomoću polumjera manje kružnice.

Rješenja zadataka

1. Označimo sa x, y i z okomita odstojanja proizvoljne točke M od stranica trokuta (sl. 1). Ploština trokuta ABC jednaka je zbroju ploština trokuta ABM, BCM i ACM, što daje jednadžbu: $\frac{1}{2}ax+\frac{1}{2}ay+\frac{1}{2}az=\frac{1}{2}ah$. Posle skraćivanja sa $\frac{1}{2}a$, dobijamo: $x+y+z=h$, što se i tvrdilo.

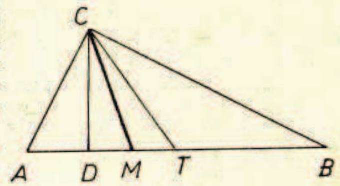


Sl. 1

2. Ako sa x označimo prvu znamenku traženog broja, treba da bude zadovoljen uvjet: $5\,\bar{x}y=10\,y+x$. Da bi broj $5\,\bar{x}y$ bio sa istim brojem znamenaka kao i broj $10y+x$, mora biti $x=1$. Međutim, tada broj $10y+x$ ne može biti djeljiv sa 5 i ne može biti jednak $5\,\bar{x}y$. Traženi broj ne postoji.

3. Dvoznamenkastih brojeva ima 90. Ako bi produkt svaka dva dvoznamenkasta bio četveroznamenkast, tada bi ovih produkata bilo ukupno $90\cdot 90/2=4\,050$, a to je manje od polovine (5000) ukupnog broja četverozmamenkastih brojeva. Prema tome, više je četveroznamenkastih brojeva koji nisu produkt dvaju dvoznamenkastih brojeva.

4. Neka je CD visina, CM simetrala kuta i CT težišnica trokuta ABC (sl. 2). Uočimo da je kut ACD jednak kutu ABC, kao kut sa okomitim kracima. Poznato je da je hipotenuzina težišnica jednaka polovini hipotenuze: $CT=BT$. Zbog toga je trokut BCT jednakokračan, pa je $\sphericalangle BCT=\sphericalangle TBC$. Otuda je i $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCT$. Zbog toga je $\sphericalangle TCM=\sphericalangle DCM$, tj. CM je simetrala kuta DCT, što je i trebalo dokazati.

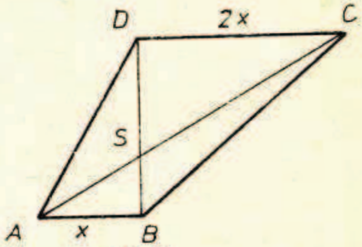


Sl. 2

VIII RAZRED

1. Vidjeti rješenje zadatka 3. za VII razred.

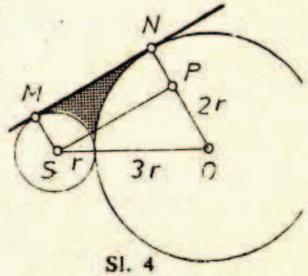
2. Trokuti ABS i CDS su slični, pa ako sa x označimo duljinu dužine AB, tada je $2x$ duljina dužine CD (sl. 3). Iz uvjeta da je AC simetrala kuta BAD izlazi da je $\sphericalangle BAC=\sphericalangle CAD$. Sem toga je $\sphericalangle ACD=\sphericalangle CAB$ (kao naizmenični kutevi), pa je $\sphericalangle CAD=\sphericalangle ACD$ i trokut ACD je jednakokračan, što znači da je $AD=CD$. Pravokutni trokut ABD je polovina jednakostraničnog trokuta, pa je $x=\sqrt{3}=d(A, B)$ i $d(A, D)=2\sqrt{3}=d(C, D)$. Iz pravokutnog trokuta BCD izračunavamo: $d(B, C)=\sqrt{(2x)^2+3^2}=\sqrt{21}$. Opseg trapeza je: $O=5x+\sqrt{21}=5\sqrt{3}+\sqrt{21}$.



Sl. 3

3. Neka je m najveća zajednička mjera brojeva a i b. Tada je $a=mp$ i $b=mq$, gdje su p i q prirodni brojevi, uzajamno prosti. Pretpostavimo da je $p<q$. Najmanji zajednički višekratnik za a i b je $s=mpq$. Dati uvjet je: $mpq-m=30$, odnosno $m(pq-1)=30$. Kako je $30=2\cdot 3\cdot 5$, imaćemo više mogućih izbora za $m: m\in\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30,\}$. Ako je, na primjer, $m=1$, tada je $pq-1=30$, tj. $pq=31$ i $p=1$, $q=31$. U slučaju $m=2$, biće $pq-1=15$, tj. $pq=16$, pa kako su p i q uzajamno prosti brojevi, dobijamo $p=1$, $q=16$. Razrešavajući sve mogućnosti dobijamo sljedeća rješenja za (a, b): (1, 31), (2, 32), (3, 33), (5, 35), (6, 36), (12, 18), (10, 40,) (15, 45) i (40, 60).

4. Neka su S i O centri datih kružnica, a M i N točke u kojima zajednička tangenta dodiruje kružnice (sl. 4). Neka je, dalje, P točka polupręčnika ON, takva da je četvorekut $MNPS$ paralelogram. U pravokutnom trokutu OPS je kateta $OP=2r$ dva puta manja od hipotenuze $OS=4r$, pa je $POS=60°$ i $\sphericalangle OSP=30°$. Samim tim je $MSO=120°$. Tražena ploština je razlika ploštine trapeza $MNOS$ i dvaju isečaka:
$$P=\frac{r+3r}{2}\cdot SP-\frac{1}{3}r^2\pi-\frac{1}{6}(3r)^2\pi.$$
Kako je $PS=2r\sqrt{3}$, dobijamo traženu ploštinu: $P=2r\cdot 2r\sqrt{3}-\frac{1}{3}\cdot r^2\pi-\frac{1}{6}9r^2\pi=4r^2\sqrt{3}-\frac{11}{6}r^2\pi$.



Sl. 4

1983. - republičko natjecanje - 7. i 8. razred
Matematički list za učenike osnovne škole
http://www.dms.org.rs/index.php?action=matematicki_list
http://public.carnet.hr/mat-natj

REPUBLIČKO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SR HRVATSKA
1983. godina
VII RAZRED

1. Dokaži ovu tvrdnju: ako se u unutrašnjosti jednakostraničnog trokuta odabere neka točka, tada je zbroj udaljenosti te točke od stranica trokuta jednaka visini trokuta.

2. Da li postoji prirodan broj koji ima ovo svojstvo: ako se prva znamenka izbriše i dopiše iza poslijednje znamenke, tada je novi broj pet puta veći od početnog?

3. Ima li više četveroznamenkastih brojeva koji se mogu prikazati kao umnožak dvaju dvoznamenkastih brojeva ili onih koji se ne mogu tako prikazati?

4. Dokazati da je u pravokutnom trokutu simetrala pravog kuta također i simetrala kuta što ga čine težišnica i visina iz pravog kuta.

REPUBLIČKO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SR HRVATSKA
1983. godina
VIII RAZRED

1. Ima li više četveroznamenkastih brojeva koji se mogu prikazati kao umnožak dvaju dvoznamenkastih brojeva ili onih koji se ne mogu tako prikazati?

2. Zadan je trapez *ABCD* s paralelnim stranicama *AB* i *CD.* Izračunaj opseg tog trapeza ako je poznato da je dijagonala *BD* okomita na stranicu *AB*, da dijagonala *AC* raspolavlja kut *DAB*, te da se dijagonale sijeku u točki *S* tako da je $d(B, S) = 1$, $d(S, D) = 2$.

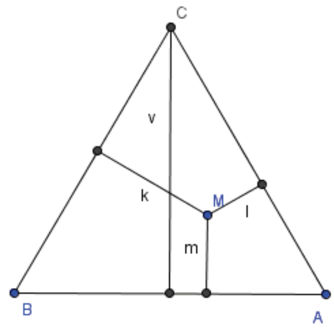
3. Odredi sve prirodne brojeve za koje je razlika između njihovog najmanjeg zajedničkog višekratnika i najveće zajedničke mjere jednaka 30.

4. Dvije kružnice čiji se polumjeri odnose kao *1:3* dodiruju se izvana. Izrazi površinu lika kojeg zatvaraju zajednička tangenta i kružnice pomoću polumjera manje kružnice.

Rješenja zadataka

REPUBLIČKO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SR HRVATSKA
1983. godina
VII RAZRED

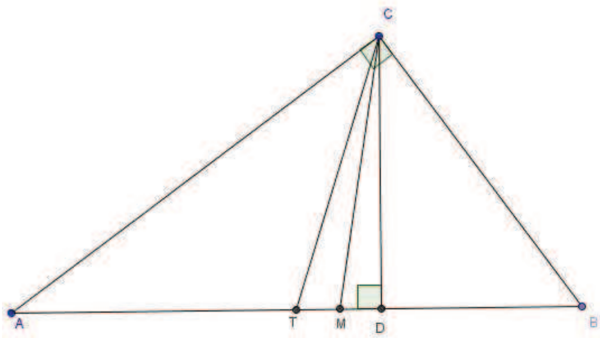
1. Označimo sa *k, l* i *m* okomita odstojanja proizvoljne točke od stranica trokuta (vidi sliku). Površina trokuta *ABC*jednaka je zbroju površina trokuta *ABM, BCM* i *ACM*, što daje jednadžbu . Poslije skraživanja sa dobijemo *k+l+m = v*, što se i tvrdilo!



2. Ako sa x označimo prvu znamenku traženog broja, treba biti zadovoljen uvjet: 5xy=10x+y. Da bi broj 5xy bio sa istim brojem znamenaka kao i broj 10y+x, mora biti x=1. Međutim, tada broj 10y+x ne može biti djeljiv sa 5 i ne može biti jednak 5xy. Traženi broj ne postoji!

3. Dvoznamenkastih brojeva ima 90. Ako bi produkt svaka dva dvoznamenkasta broja bio četveroznamenkasti, tada bi ovih produkata bilo 90*90/20 = 4050, a to je manje od polovine (5000) ukupnog broja četveroznamenkastih brojeva. Prema tome, više je četveroznamenkastih brojeva koji nisu produkt dvaju dvoznamenkastih brojeva.

4. Neka je *CD* visina, *CM* simetrala kuta i *CT* težišnica trokuta *ABC.* Uočimo da je kut *ACD* jednak kutu *ABC*, kao kut sa okomitim kracima. Poznato je da je hipotenuzina težišnica jednaka polovini hipotenuze: *CT=BT*. Zbog toga je trokut jednakokračan, pa je kut *BCT* jednak kutu *TBC.* Otuda je i kut *ACD* jednak kutu *BCT.* Zbog toga je kut *TCM* jednak kutu *DCM,* tj. *CM* je simetrala kuta *DCT*, što je i trebalo dokazati.

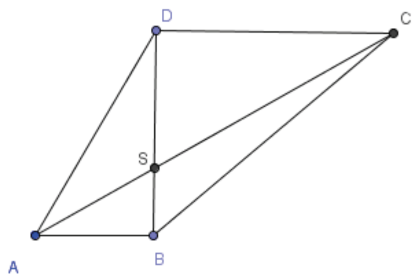


Rješenja zadataka

REPUBLIČKO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SR HRVATSKA
1983. godina
VIII RAZRED
(druga skupina)

1. Vidjeti rješenje zadatka 3. za VII razred!

2. Trokuti *ABS* i *CDS* su slični, pa ako sa *x*označimo duljinu dužine *AB*, tada je *2x* duljina dužine *CD.* Iz uvjeta da je *AC* simetrala kuta *BAD* izlazi da je kut *BAC* jednak kutu *CAD*. Osim toga je kut *ACD* jednak kutu *CAB* (kao naizmjenični kutovi), pa je kut *CAD* jednak kutu *ACD* i trokut *ACD* je jednakokračan., što znači da je *AD=CD.* Pravokutni trokut *ABD* je polovina jednakostraničnog trokuta, pa je $x=\sqrt{3}=d(A,B)$ i $d(A,D)=2\sqrt{3}=d(C,D)$. Iz pravokutnog trokuta *BCD* izračunamo: $d(B,C)=\sqrt{(2x)^2+3^2}=\sqrt{21}$. Opseg trapeza je $o=5x+\sqrt{21}=5\sqrt{3}+\sqrt{21}$.



3. Neka je m najveća zajednička mjera brojeva a i b. Tada je a=mp i b=mq, gdje su p i q prirodni brojevi, uzajamno prosti. Pretpostavimo da je p<q. Najmanji zajednički višekratnik za a i b je s=mpq. Dan je uvjet: mpq-m=30, odnosno m(pq-1)=30. Kako je 30=2*3*5, imat ćemo više mogućih izbora za m: m= 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. Ako je, na primjer m=1, tada je pq-1 = 30, tj. pq= 31 i p=1, q=31. U slučaju da je m=2, biti će pq-1=15, tj. pq=16, pa kako su p i q uzajamno prosti, dobit ćemo p= 1, q=16. Rješavajući sve moguće slučajeve dibivamo slijedeća rješenja: (1, 31), (2, 32), (3, 33), (5, 35), (6, 36), (12, 18), (10, 40), (15, 45), (40, 60).

4. Neka su S i O centri danih kružnica, a M i N točke u kojima zajednička tangenta doiruje kružnice. Neka je, nadalje, P točka polumjera ON, takva da je četvrokut MNPS paralelogram. U pravokutnom trokutu OPS je kateta OP=2r dva puta manja od hipotenute OS=4r, pa je kut POS= 60° i kut OSP = 30°. Samim time je kut MSO = 120°. Tražena površina je razlika površine trapeza MNOS i dvaju isječaka:

$$P=\frac{r+3r}{2}SP-\frac{1}{3}r^2\pi-\frac{1}{6(3[r)]^3\pi}.$$

Kako je $PS=2r\sqrt{3}$, dobijemo traženu površinu:

$$P=2r\cdot 2r\sqrt{3}-\frac{1}{3}r^2\pi-\frac{1}{6}9r^2\pi=4r^2\sqrt{3}-\frac{11}{6}r^2\pi$$