XVII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1986. godina

VII RAZRED

1. Drugovi Amir, Boris i Cane ulože u jedno kolo sportske prognoze ove iznose: Amir 600 dinara, Boris 900 dinara, Cane 1 500 dinara. Na prognozi su dobili ukupno 17 000 dinara. Kako će pravilno podijeliti dobitak?

2. Djeca su skupila neki broj buba (kukaca) i paukova. Kad bi se prebrojale sve noge, dobio bi se broj 176. Koliko je bilo buba, a koliko paukova, ako su njihovi brojevi parni i dvoznamenkasti? (Pauk ima 8 nogu, a buba 6).

3. Jedan četveroznamenkasti broj ima sljedeća svojstva:
   1.) prva i četvrta znamenka jednake su među sobom;
   2.) druga i treća znamenka jednake su među sobom;
   3.) broj je jednak umnošku tri uzastopna prosta broja.

   Koji je taj broj?

4. Dokazati da je u pravokutnom trokutu zbroj kateta jednak dvostrukom zbroju polumjera opisane i upisane kružnice.

5. Naći unutrašnje kutove jednakokračnog trokuta ABC ($AC=BC$), ako su središta 01 i 0 upisane i opisane kružnice simetrični u odnosu na osnovicu trokuta.

XVII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1986. godina

VIII RAZRED

1. Ako se prirodnom broju, koji se završava sa 5, ukloni poslednja znamenka, dobiveni broj pomnoži svojim sljedbenikom i umnošku zdesna dopiše 25, dobiva se kvadrat prvobitnog broja. Dokazati da ovo vrijedi za troznamenkaste brojeve.

2. Naći sve trojke (x, y, z), gde su x, y i z prirodni brojevi, koje zadovoljavaju jednadžbu:

$$xyz + xy + xz + yz + x + y + z + 1 = 1986,$$

tako da je x najmanji od ovih brojeva.

3. Na školskoj ploči je napisan troznamenkasti broj **8.
Tri učenika su pogađala svojstva ovog broja.
Zoran: Sve su mu znamenke parne i ima paran broj različitih prostih djelitelja.
Dušan: Djeljiv je sa 9 i predstavlja kvadrat nekog prirodnog broja.
Nikola: Manji je od 400 i 13 puta je veći od kvadrata jednog prirodnog broja.
Ispostavilo se da je svako od njih samo po jedno svojstvo točno prognozirao.
Koje znamenke stoje umesto zvjezdica?

4. Dat je pravokutnik ABCD. U njemu se bira proizvoljna točka, kroz koju se konstruiraju dva pravca paralelna stranicama pravokutnika. Dokazati da je površina bar jednog od pravokutnika koji sadrži točku A ili točku C manja ili jednaka četvrtini površine cijelog pravokutnika.

5. U pravokutnom trokutu ABC katete su a i b, hipotenuza c i hipotenuzina visina h. Dokazati da je $c + h > a + b$.

Rješenja zadataka

XVII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1986. godina

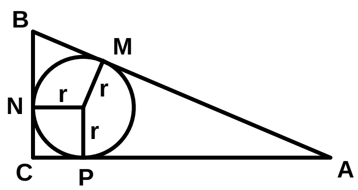
VII RAZRED

1. Neka su a,b,c dijelovi od 17 000 dinara, koje Amir, Boris i Cane trebaju dobiti. Tada je a:b:c = 600:900:1500 = 2:3:5.
Stoga ćemo najprije podijeliti na 10 dijelova (2+3+5), pa svaki dobija odgovarajući dio:
$a = 2 \cdot 1700 = 3400$ dinara;
$b = 3 \cdot 1700 = 5100$ dinara;
$c = 5 \cdot 1\,700 = 8500$ dinara.

2. Ako je buba bilo b, a paukova p, dobijamo jednadžbu
$6b + 8p = 176$,
odnosno $3b + 4p = 88$,
a odavde: $p = 22 - 3/4b$.
Da bi b i p bili dvoznamenkasti, mora biti
$8 < ¾ b<13$,
odnosno $10<b\leq 17$,
a da bi p bio paran broj, mora biti b djeljiv sa 8.
Prema tome je b=16, pa je p=10.

3. Neka je taženi broj $x = \overline{abba}$. Možemo ga prikazati u obliku
$x = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$.
Dakle x je deljiv sa 11, pa je, prema uvjetu:
$x = 5\cdot7\cdot11$ ili $x = 7\cdot11\cdot13$ ili $x = 11\cdot13\cdot17$,
odnosno x=385 ili x=1001 ili x=2431.
Vidimo da postavljene uvjete zadovoljava samo broj x=1001.

4. Poznato je da su tangentne dužine, povučene iz jedne točke na krug, jednake među sobom.
Tako su na sl. 1 : CP=CN=r, AP=AM i BM=BN.
Također je poznato da je hipotenuza jednaka promjeru opisanog kruga: AB=c=2R.
Sada imamo: a+b = CP+PA+BN+CN = r+AM+MB+r = 2r+AB = 2r+2R, što se i tvrdilo.



Sl. 1

5. Prema sl.2, kut ASC je 2 puta veći od kuta ABC (središnji i obodni kutovi opisanog kruga): ∢ ASC =2ß. Osim toga, zbog SA=SC=R, kutovi SAC i SCA jednaki su među sobom. Ako sa φ označimo ∢OAC, zbog simetrije točaka O i S u odnosu na AB i zato što je AO simetrala kuta BAC, bit će: ∢SAC=3φ= ∢SCA=γ/2.ako je α=ß=2φ,dobijamo jednakost:
α + ß+ γ = 2φ+2φ+6φ = 180°, odakle je φ=18°. Prema tome, unutrašnji kutovi trokuta ABC su 36°, 36°, 108°.

Rješenja zadataka

XVII. SAVEZNO NATJECANJE ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA
SFRJ
1986. godina

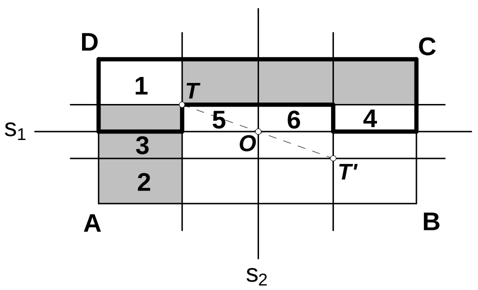
VIII RAZRED

1. Neka je dati broj x=10a+5. Uklanjanjem znamenke 5 dobivamo broj a. Kada ovaj broj pomnožimo njegovim sljedbenikom i umnošku dopišemo 25, dobit ćemo $a(a+1)\cdot 100+25 = 100a^2 +100a +25 = (10a+5)^2 = x^2$. Ovo vrijedi za svaki broj x, pa prema tome, i za svaki troznamenkasti broj.

2. Polinom na lijevoj strani možemo napisati u obliku umnoška binoma:
$(xyz+yz)+(xy+y)+(xz+z)+(x+1) = yz(x+1)+y(x+1)+z(x+1)+(x+1) =$
$= (x+1)(yz+y+z+1) = (x+1)(z(y+1)+(y+1)) = (x+1)(y+1)(z+1) = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 331.$
Kako je x najmanji broj, to mora biti x + 1=2, tj. x=1. Dalje je y+1=3 i z+1=331, ili je y+1 =331 i z+1=3. Tako dobivamo dva rješenja: x=1,y=2, z=330, ili x=1, y=330, z=2.

3. Broj na školskoj ploči ima posljednju znamenku 8, pa zbog toga ne može biti kvadrat prirodnog broja. Znači, točna je tvdnja Dušana da je taj broj djeljiv sa 9. Prema tome, to je jedan od sljedećih brojeva: 108, 198, 288, 378, 468, 558, 648, 738, 828, 918. Na osnovu Nikoline izjave izlazi da to mogu biti ili brojevi manji od 400 ili broj 468 jer je $468 =36\cdot 13$. Rastavimo preostale brojeve na proste faktore: $108=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3$, $198=2\cdot 3\cdot 3\cdot 11$, $288=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3$, $378=2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7$, $468=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 13$. Vidimo da samo jednu od osobina koje je naveo Zoran imaju 2 od 5 preostalih brojeva: 108 (ima paran broj različitih prostih faktora) i 468 (sve su mu znamenke parne). Na školskoj ploči napisan je jedan od brojeva **108** ili **468**.

4. Neka su s_1 i s_2 osi simetrije pravokutnika ABCD (Sl. 3). One dijele pravokutnik na 4 jednaka dijela, svaki površine jednake P/4. Ako točku izaberemo u jednom od dijelova koji sadrže točku A ili točku C, dokaz tvrdnje je vrlo jednostavan. Ali ako se točka, recimo točka T, bira van ova dva dijela pravokutnika, dokaz je nešto teži. Neka je izabrana tačka T, kao na slici. Konstruiramo točku T', simetričnu sa T u odnosu na O i podijelimo pravokutnik ABCD pravcima kroz T i T', paralelnim sa stranicama. Dokazat ćemo da je zbroj traženih pravokutnika (osjenčanih na slici) manji od P/2. Uočimo da su zbog simetrije jednaki pravokutnici označeni na slici sa 1 i 2, a takođe i pravokutnici 3 i 4.Uzimajući ovo u obzir, uvjeravamo se da je zbroj površina osjenčanih pravokutnika jednak površini osmerokuta, nacrtanog debljom linijom. Kako je ova površina manja od P/2 za zbroj površina označenih sa 5 i 6, to je sigurno bar jedan od osjenčanih pravokutnika manji od P/4, a to je i trebalo dokazati.



Sl. 3