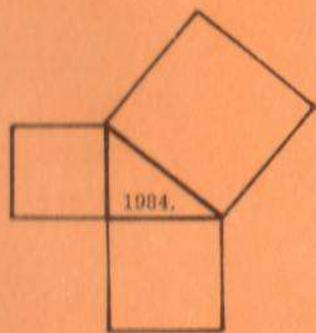
Najtoplije zahvaljujem **prof. Luki Čelikoviću** i **dr. Zdravku Kurniku** na dozvoli da knjižicu
"Matematička natjecanja srednjoškolaca u SFRJ u 1988. godini "
skeniram i objavim na http://public.carnet.hr/mat-natj .
Ovdje možete naći zadatke i rješenja sa saveznog natjecanja.

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
»P I T A G O R A«
BELI MANASTIR

Priredili:
Luka Čeliković
dr. Zdravko Kurnik

# MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ U 1988. GODINI

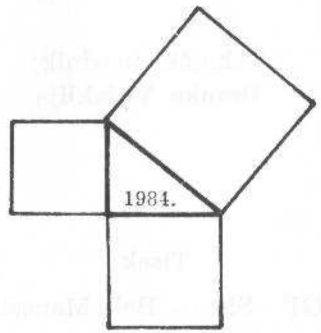



Beli Manastir, 1990.

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA
»P I T A G O R A«
BELI MANASTIR

Priredili:
**Luka Čeliković**
**dr. Zdravko Kurnik**

# MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ U 1988. GODINI




Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA SREDNJOŠKOLACA U SFRJ
U 1988. GODINI

Pripremili:

**Luka Čeliković**
**dr. Zdravko Kurnik**

Izdavač:

DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:

**Luka Čeliković**
**Milan Šarić**

Tehnički urednik:
**Branko Vujaklija**

Tisak:

GP »Slovo« Beli Manastir

Beli Manastir, 1990.

SADRŽAJ

## PREDGOVOR

*Ova zbirka sadrži riješene zadatke sa matematičkih natjecanja srednjoškolaca u 1988. godini i to sa republičkih natjecanja svih naših Republika, pokrajinskog natjecanja SAP Vojvodine, »Arhimedesovog matematičkog turnira« (SR Srbija) i saveznog natjecanja.*

*Pri izradi zbirke korišteni su materijali natjecateljskih komisija. U prikupljanju tih materijala posebno su se angažirali prof. Anđelko Marić iz Sinja i prof. Ivo Vujičić iz Titograda.*

*Zadatke i potpuna rješenja sa »Arhimedesovog matematičkog turnira« dao je prof. Bogoljub Marinković iz Beograda. Dio zadataka pregledao je i dao većinu rješenja sa Saveznog natjecanja dr. Vladimir Volenec iz Zagreba. Pojedina rješenja uzeta su prema rješenjima dr. Vladimira Jankovića iz Beograda (Savezno II 2), Mirana Božičevića iz Zagreba (Savezno II 3), prof. Milovana Mladenovića iz Grocke (Savezno III i IV 2), dr. Pavla Mladenovića iz Beograda (Savezno III i IV 3), te Dijane Ilišević iz Belog Manastira (Republičko SR Crne Gore III 2, 3). Kontrolu kucanog teksta izvršili su Anđa Mijatović i Denis Vidović.*

*Svim spomenutim osobama najtoplije se zahvaljujemo. Također se zahvaljujemo radnim ljudima GP »Slovo« Beli Manastir, a posebno diplomiranom ekonomisti Dragi Pašajliću i Branku Vujakliji na štampanju zbirke, te radnim organizacijama Baranje, a posebno dipl. oecc. Milki Bošnjak—Mrđa na sufinanciranju zbirke. Unaprijed se zahvaljujemo i svima onima koji nam ukažu na eventualne štamparske greške.*

*Luka Čeliković*
*Zdravko Kurnik*

**S F R   J U G O S L A V I J A**

**SAVEZNO NATJECANJE**
**Sinj, 23. 04. 1988.**

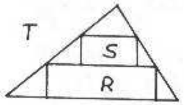
**Z a d a c i :**

**I razred:**

1) Ako je n prirodan broj veći od 1 za koga vrijedi:
$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$ onda je n prost broj. Dokazati. ( $[x]$ je najveći cio broj koji nije veći od x).

2) Izračunati kuteve trokuta ABC, ako težišnica, simetrala kuta i visina iz vrha C dijele kut ACB na četiri jednaka dijela.

3) U dani šiljastokutan trokut T upisana su dva pravokutnika R i S, kao na slici. Odredi najveću moguću vrijednost izraza:




$$\frac{P_R+P_S}{P_T}$$, gdje P označava površinu.

4) Medjunarodnoj konferenciji prisustvuju po dva predstavnika iz 27 zemalja. Dokazati da se učesnici konferencije ne mogu poredati za okruglim stolom, tako da izmedju svaka dva učesnika, koji su predstavnici iste zemlje, sjedi točno 9 drugih učesnika konferencije.

**II razred:**

1) Neka je O središte opisane kružnice trokuta ABC. Označimo sa P,Q,R redom središta lukova $\widehat{AB},\widehat{BC},\widehat{CA}$, koji ne sadrže redom točke C,A,B. Ako za točku X vrijedi: $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$, dokazati da je X središte upisane kružnice trokuta ABC.

2) Odrediti za koje neparne prirodne brojeve $n\geqslant 3$ je funkcija $F:Q\longrightarrow Q$, $f(x)=x^n-2x$, injektivna. (Q je skup racionalnih brojeva; funkcija je injektivna ako različite brojeve preslikava u različite brojeve).



3) Za skup $A\subset N$ kažemo da je "dobar" ako za neki prirodan broj n jednadžba $x-y=n$ ima beskonačno mnogo rješenja $(x,y)$, gdje je $x\in A$, $y\in A$.
Ako je $N=A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{1988}$, onda je bar jedan od skupova $A_1,A_2,\ldots,A_{1988}$ "dobar". Dokazati. (N je skup prirodnih brojeva).

4) Dokazati da unutar konveksnog 2n-terokuta ne postoje dvije različite točke kroz koje prolazi po n dijagonala tog 2n-terokuta.

**III i IV razred:**

1) Neka su $a,b,c,d\in N_0$ i $d\neq 0$. Funkcija $f:N_0\longrightarrow N_0$ odredjena je uvjetom: $f(x)=\left[\frac{ax+b}{cx+d}\right]$. Dokazati da je f injektivna ako i samo ako je $c=0$ i $a\geqslant d$. ($N_0=\{0,1,\ldots\}$, $[x]$ je najveći cio broj koji nije veći od x ).

2) U n-terostranu piramidu može se upisati sfera. Svaku od pobočnih strana piramide zarotiramo oko odgovarajućeg brida baze do poklapanja s ravninom baze, tako da slika pobočne strane ima zajedničkih unutarnjih točaka sa bazom. Na taj način dobiveno je n slika vrha piramide. Dokazati da tih n slika pripadaju jednoj kružnici.

3) Dan je strogo rastući niz $a_1,a_2,a_3,\ldots$ prirodnih brojeva, tako da je $a_1=1$, $a_2=2$ i da za sve relativno proste brojeve m i n vrijedi $a_m\cdot a_n=a_{mn}$. Dokazati da za svaki prirodan broj n vrijedi: $a_n=n$.

4) U jednoj državi ima više od 7 gradova. Dokazati da ne postoji mreža jednosmjernih puteva sa slijedećim svojstvima :
(a) Izmedju svaka dva grada postoji točno jedan direktan put.
(b) Za svaka dva grada A i B postoji točno jedan grad u koji se direktno može stići i iz A i iz B.
(c) Za svaka dva grada A i B postoji točno jedan grad iz kojeg se direktno može stići i u A i u B.

**R j e š e n j a :**

**I razred:**

1) Dokažimo prvo jednu pomoćnu lemu: Ako su $n, k \in N$, tada je $\left[\frac{n}{k}\right]$ jednako broju svih višekratnika $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ broja k.

Dokaz leme: Neka je $n = kq + r$, $q, r \in N_0$, $0 \leq r < k$. Tada su višekratnici broja k: $k, 2k, \dots, qk$, tj. ukupno ih je q. S druge strane je $\left[\frac{n}{k}\right] = \left[\frac{kq+r}{k}\right] = \left[q + \frac{r}{k}\right] = q + \left[\frac{r}{k}\right]$ (zbog $q \in N_0$) $= q + 0 = q$, čime je tvrdnja leme dokazana.

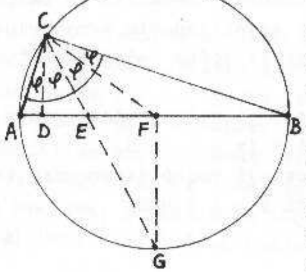
Iz leme neposredno proizlazi da je

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 0, & \text{za } k \nmid n \\ 1, & \text{za } k \mid n \end{cases} \quad (*) .$$

Dokažimo sada tvrdnju zadatka:

$$\left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \dots + \left[\frac{n}{n-1}\right] + \left[\frac{n}{n}\right] =$$
$$= 2 + \left[\frac{n-1}{1}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{3}\right] + \dots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right] \iff$$
$$\iff n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \dots + \left[\frac{n}{n-1}\right] + 1 =$$
$$= 2 + (n-1) + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{3}\right] + \dots + \left[\frac{n-1}{n-1}\right] \iff$$
$$\iff \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) + \left(\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n-1}{3}\right]\right) + \dots + \left(\left[\frac{n}{n-1}\right] - \left[\frac{n-1}{n-1}\right]\right) = 0 \iff$$
$$\iff \left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = 0, \ \forall k \in \{2, 3, \dots, n-1\} \overset{(*)}{\iff}$$
$$\overset{(*)}{\iff} k \nmid n, \ \forall k \in \{2, 3, \dots, n-1\} \iff n \text{ je prost broj.}$$

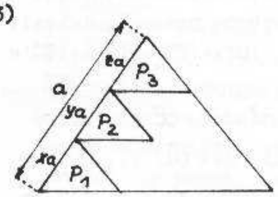
2)




Uz oznake na slici, neka simetrala kuta siječe opisanu kružnicu u G. Iz $\sphericalangle ACG = 2\varphi = \sphericalangle BCG$ slijedi $\widehat{AG} = \widehat{BG}$, pa je FG simetrala stranice $\overline{AB}$. Iz $CD \parallel FG$ slijedi $\sphericalangle CGF = \sphericalangle DEC = \varphi = \sphericalangle GCF$, pa je trokut CFG jednakokračan i simetrala baze $\overline{CG}$ prolazi kroz vrh F. Zato je F sjecište simetrala dviju tetiva $\overline{AB}$ i $\overline{CG}$ kružnice, tj. središte te kružnice. Dakle, $\overline{AB}$ je promjer te kružnice i po Talesovom teoremu je $4\varphi = \sphericalangle ACB = 90^\circ$. Dalje je $\sphericalangle BAC = 90^\circ - \sphericalangle ACD = 90^\circ - \varphi = 67^\circ 30'$, $\sphericalangle ABC = 90^\circ - 3\varphi = 22^\circ 30'$.



3)




Vučenjem paralela kao na slici, dobivaju se tri trokuta s površinama $P_1, P_2, P_3$, slična trokutu T, pa vrijedi

$$\frac{P_R + P_S}{P_T} = \frac{P_T - (P_1 + P_2 + P_3)}{P_T} =$$
$$= 1 - \left(\frac{P_1}{P_T} + \frac{P_2}{P_T} + \frac{P_3}{P_T}\right) = 1 - (x^2 + y^2 + z^2),$$

gdje su xa, ya, za, a duljine odgovarajućih stranica.

Uz $x + y + z = 1$, treba odrediti najmanju vrijednost izraza $x^2 + y^2 + z^2$. Medjutim, iz identiteta $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}((x+y+z)^2 + (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2)$ slijedi da se najmanja vrijednost postiže za $x = y = z = \frac{1}{3}$, a iznosi $\frac{1}{3}$.

Tražena najveća vrijednost od $\frac{P_R + P_S}{P_T}$ je $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

4) Pretpostavimo (suprotno tvrdnji zadatka) da je moguće ostvariti raspored učesnika konferencije, tako da izmedju svaka dva zemljaka sjedi točno 9 učesnika drugih zemalja. Neka su $x_k$ i $y_k$, $x_k < y_k$, $k = 1, 2, \dots, 27$, redni brojevi zemljaka. Tada je $y_k - x_k \in \{10, 44\}$, pa imamo:

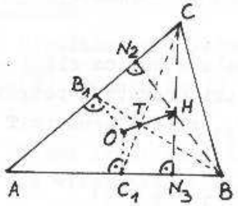
$$Y - X = \sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = 10a + 44b \text{ i } Y + X = 1 + 2 + \dots + 54 = 1485 .$$

Odatle je $2Y = 10a + 44b + 1485$, što je očito kontradikcija (jer je lijeva strana paran broj, a desna neparan). Dakle, navedeni razmještaj je nemoguć.

**II razred:**

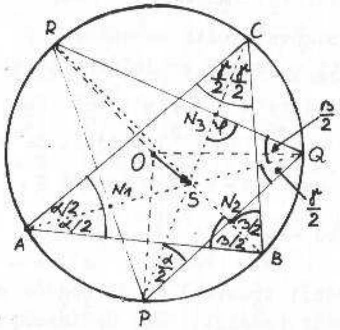
1) Dokažimo prvo jednu pomoćnu lemu: Ako je O središte opisane kružnice, a H ortocentar trokuta ABC, tada vrijedi: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH}$.

Dokaz leme: Neka je T težište trokuta ABC. Tada (uz oznake kao na slici), na osnovu činjenice da su O,T,H kolinearne točke (leže na Eulerovom pravcu), izlazi:




$\Delta TOC_1 \sim \Delta THC \Rightarrow |OT| : |TH| = |TC_1| : |TC| = 1:2 \Rightarrow |TH| = 2.|OT| \Rightarrow \overrightarrow{TH} = 2.\overrightarrow{OT} \Rightarrow$
$\Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3.\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (dokažite da je $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ !).

Dokažimo sada tvrdnju zadatka: Prvo imamo da su C,S,P kolinearne točke ($\widehat{AP} = \widehat{PB}$, $\sphericalangle ACS = \sphericalangle SCB = \gamma/2$, S = središte upisane kružnice trokuta ABC) i analogno tome da su B,S,R, te A,S,Q kolinearne točke. Nadalje je $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle CAQ = \alpha/2$ (kutevi nad istim kružnim lukom $\widehat{QC}$) i analogno tome $\sphericalangle PQA = \gamma/2$ i $\sphericalangle AQR = \beta/2$, pa iz odnosa kuteva u trokutu $SQN_3$ izlazi $\beta/2 + (\alpha/2 + \gamma/2) + \varphi = 180^\circ$, tj. $\varphi = 90^\circ$, odnosno




$\overline{PN_3} \perp \overline{QR}$. Analogno izlazi da je $\overline{QN_1} \perp \overline{RP}$ i $\overline{RN_2} \perp \overline{PQ}$, pa je S ortocentar trokuta PQR. Prema prethodnoj lemi izlazi:
$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OS}$ (*).
Iz $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$ i (*) slijedi da je $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OS}$, tj. $X \equiv S$, što se i tvrdilo.

2) Dokazat ćemo da je za svaki neparan prirodan broj $n \geq 3$ funkcija $f: Q \to Q$, $f(x) = x^n - 2x$ injektivna.
Pretpostavimo (suprotno toj tvrdnji) da f nije injektivna, tj. da postoje $u, v \in Q$, $u \neq v$, $u = x/z$, $v = y/z$, $x, y, z \in Z$, $x \neq y$, $z \neq 0$, $M(x,y,z) = 1$, tako da je $f(u) = f(v)$. Tada izlazi: $f(u) = f(v) \Rightarrow f(x/z) = f(y/z) \Rightarrow (x/z)^n - 2.(x/z) = (y/z)^n - 2.(y/z) \Rightarrow (x^n - y^n)/z^n = 2.(x-y)/z \Rightarrow$



$\Rightarrow (x^n - y^n)/(x-y) = 2z^{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1} = 2z^{n-1}$ (*).
Na lijevoj strani jednakosti (*) ima neparan broj n pribrojnika.
Ako su x,y neparni, tada su svi pribrojnici neparni, pa je cijela lijeva strana neparna, dok je desna strana parna. Ako je jedan od brojeva x,y paran, a drugi neparan, tada su svi pribrojnici osim jednog (prvog ili zadnjeg) parni, pa je opet lijeva strana neparna.
Ako su x,y parni, tada je lijeva strana od (*) djeljiva sa $2^{n-1}$, pa slijedi: $2^{n-1} | 2z^{n-1} \Rightarrow 2^{n-2} | z^{n-1} \Rightarrow 2 | z \Rightarrow$
$\Rightarrow M(x,y,z) = 2$, što je opet kontradikcija.

3) Podijelimo skup N na disjunktne podskupove $S_0, S_1, S_2, \ldots$ oblika $S_k = \{1989k+1, 1989k+2, \ldots, 1989k+1989\}$, $k \in N_0$. Za svaki skup $S_i$ postojat će bar jedan skup $A_j$, koji sadrži bar dva elementa skupa $S_i$ (Dirichletov princip). Pošto skupova $S_i$ ima beskonačno mnogo, bar jedan od skupova $A_j$, označimo ga sa A', sadrži beskonačno mnogo parova x,y, $x > y$, takvih da x i y pripadaju istom $S_i$. Očigledno je $x - y \in \{1, \ldots, 1989\}$, pa, pošto je parova (x,y) beskonačno mnogo, postoji bar jedan prirodan broj n za koji jednadžba $x - y = n$ ima beskonačno mnogo rješenja (x,y), $x, y \in A'$. Prema tome, skup A' je "dobar" skup.

4) Sjecište S od n dijagonala je unutrašnja točka našeg konveksnog 2n-terokuta. Uočimo bilo koju dijagonalu $\overline{AB}$ kroz S. Svaka od preostalih n-1 dijagonala kroz S ima jedan kraj s jedne, a drugi kraj s druge strane od $\overline{AB}$, tj. n-1 vrhova poligona nalazi se s jedne, a n-1 vrhova s druge strane od $\overline{AB}$. Zato su A,B suprotni vrhovi poligona. Dakle, u S se sijeku nužno sve "glavne" dijagonale (spojnice suprotnih vrhova). Jedinstvenost takvog sjecišta S je očita.

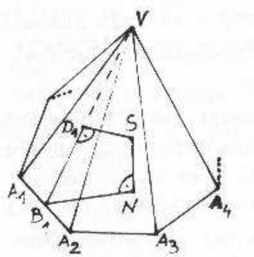
<u>III i IV razred:</u>

1) Nužnost: Neka je f injekcija. Ako je $c \neq 0$, tada imamo

$\left|\frac{ax+b}{cx+d}-\frac{a}{c}\right| = \left|\frac{bc-ad}{c(cx+d)}\right| = \frac{|bc-ad|}{c(cx+d)}$, pa za $n > \frac{1}{c}(\frac{|bc-ad|}{c} - d)$ imamo $\frac{|bc-ad|}{c} < cn+d$, tj. $\frac{|bc-ad|}{c(cn+d)} < 1$, odnosno $\left|\frac{an+b}{cn+d}-\frac{a}{c}\right| < 1$. Dakle beskonačno mnogo vrijednosti $\frac{an+b}{cn+d}$ $(n \in N_o)$ nalazi se u intervalu $(\frac{a}{c}-1, \frac{a}{c}+1)$, a onda se za sve takve vrijednosti n vrijednosti $f(n) = \left[\frac{an+b}{cn+d}\right]$ nalazi u intervalu $(\frac{a}{c}-2, \frac{a}{c}+2)$ (jer se $\frac{an+b}{cn+d}$ i $\left[\frac{an+b}{cn+d}\right]$ razlikuju za manje od 1), što nije moguće zbog injektivnosti. Zato je $c = 0$, pa onda i $f(x) = \left[\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}\right]$. To je rastuća funkcija i nužno je $\frac{a}{d} \geq 1$.

Dovoljnost: Neka je $f(x) = \left[\frac{a}{d}x + \frac{b}{d}\right]$, $a \geq d$, tj. neka je $f(x) = \left[kx + \frac{b}{d}\right]$, $k = \frac{a}{d} \geq 1$. Neka su nadalje $x_1, x_2 \in N_o$, $x_1 < x_2$, tj. neka je $x_2 = x_1 + y$, $y \in N$, $x_1 \in N_o$, $x_2 \in N$. Tada je $f(x_2) = \left[kx_2 + \frac{b}{d}\right] = \left[(kx_1 + \frac{b}{d}) + ky\right] \geq \left[(kx_1 + \frac{b}{d}) + [ky]\right] = \left[kx_1 + \frac{b}{d}\right] + [ky] = f(x_1) + [ky] \geq f(x_1) + 1$ (jer iz $k \geq 1$ & $y \geq 1 \Rightarrow ky \geq 1 \Rightarrow [ky] \geq 1$) $> f(x_1)$, tj. $f(x_2) > f(x_1)$, što znači da je f injekcija.

2)




Neka je $A_1A_2 \ldots A_n$ baza piramide, S središte sfere, $D_1, D_2, \ldots, D_n$ dirališta sfere sa pobočnim stranama, a N diralište sfere sa bazom. Tada je $|VD_1| = |VD_2| = \ldots = |VD_n|$ i $|B_iD_i| = |B_iN|$, $i = 1,2,\ldots,n$, pa se sve točke $D_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, danim preslikavanjem preslikaju u N. Odatle, zbog $|VD_i| = \text{const}$, proizlazi tvrdnja zadatka.

3) a) Po pretpostavci je $a_1 = 1, a_2 = 2$. Neka je $a_3 = k \geq 3$. Tada je:

$a_6 = a_{2\cdot 3} = a_2 \cdot a_3 = 2a_3 = 2k$,

$k + 2 \leq a_5 \leq 2k - 1$ (zbog $a_3 < a_4 < a_5 < a_6$),

$a_{10} = a_2 \cdot a_5 = 2a_5 \leq 4k - 2$,

$a_9 \leq 4k - 3$ (zbog $a_9 < a_{10}$),



$a_{18} = a_2 \cdot a_9 = 2a_9 \leq 8k - 6$, $k^2 + 2k = k(k+2) \leq a_3 \cdot a_5 = a_{15}$, $k^2 + 2k + 3 \leq a_{15} + 3 \leq a_{18} \leq 8k - 6$, $k^2 + 2k + 3 \leq 8k - 6$, $k^2 - 6k + 9 \leq 0$, $(k-3)^2 \leq 0$, $k = 3$, $a_3 = 3$ (a odatle $a_6 = 6$, $a_5 = 5$, $a_4 = 4; \ldots$).

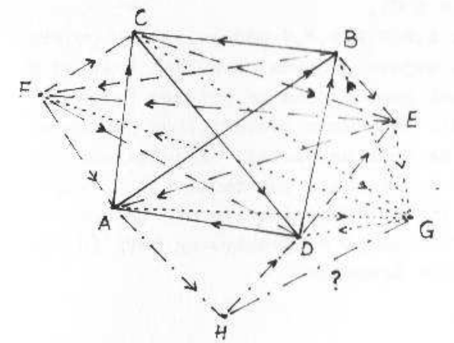
b) Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi sve do $n = k$, tj. da vrijedi $a_n = n$, $n = 1,2,\ldots,k$.

c) Dokazati da tvrdnja vrijedi i za $n = k+1$, tj. da vrijedi $a_{k+1} = k + 1$.

Dokaz:

Neka je najveća zajednička mjera $M(k, k-1) = d$. Tada $d \mid k-(k-1)$, tj. $d \mid 1$, pa je $d = 1$. To znači da su k i k-1 relativno prosti brojevi, pa po definiciji niza izlazi: $a_{k^2-k} = a_{k(k-1)} = a_k \cdot a_{k-1} = k(k-1) = k^2 - k$, zbog čega je $a_t = t$, $t \leq k^2 - k$, pa onda i $a_{k+1} = k + 1$ (zbog $k+1 < k^2 - k$, $k \geq 3$).

4)




Shvatimo gradove kao čvorove, a jednosmjerne puteve kao orijentirane grane grafa. Točku C nazovimo točkom I vrste točaka A i B ako ona zadovoljava uvjet (b), odnosno točkom II vrste ako zadovoljava uvjet (c). Neka su sada A i B proizvoljna 2 grada (čvora) i neka je C točka I, a D točka II vrste za A i B. Prema (a) postoji put (grana) koji povezuje A i B. Neka na primjer postoji orijentirani put (A,B) od A prema B (zbog simetrije slično bi bilo i za (B,A)). Tada postoji i orijentirani put (C,D) (prema (a) postoji put između C i D, a kada bi to bio (D,C), tada bi točke A i D imale 2 točke B i C I vrste, što je kontradikcija

sa (b)) .
Neka je nadalje točka E točka I, a F točka II vrste za točke C i D (prema (b) i (c) te točke moraju postojati, a prema (a) to ne mogu biti ni A ni B). Točke E i F su spojene orijentiranim putevima sa A,B,C i D. Kako ne postoji put (A,E) (jer bi A i D imali 2 točke E i B I vrste), ostaje da postoji put (E,A). Analogno se pokazuje da postoje putevi: (B,E) (jer bi u protivnom D i E bile 2 točke II vrste za točke A i B, što je kontradikcija sa (c)) , te (E,F), (F,A) i (B,F) (jer bi u protivnom redom točke E i C, C i F, B i C bile 2 točke I vrste redom za točke B i C, A i B, A i F).
Ni jedna od točaka B,C,D,F nije točka I vrste za točke A i E (zašto ? ). Neka je to točka G, tj. neka postoje putevi (A,G) i (E,G). Tada postoje putevi: (G,D),(G,F),(C,G), (G,B) (jer bi u protivnom redom točke B i G, C i G, B i G, E i G bile redom točke I,I,II,I vrste redom za točke A i D, A i F, C i F, B i C).
Na taj način 7 točaka A,B,C,D,E,F,G zadovoljavaju uvjete (a),(b),(c). No prema uvjetu zadatka mora biti više od 7 gradova. Neka je H osmi grad i neka na primjer postoji orijentirani put (A,H). Tada mora postojati orijentirani put (H,D) (zašto ? ), pa onda ne postoji orijentirani put izmedju G i H (zašto ? ), što je u kontradikciji sa (a) . Na sličan način dolazimo do kontradikcije ako umjesto (A,H) pretpostavimo postojanje orijentiranog puta (H,A). S tim je tvrdnja zadatka dokazana .