Najtoplije zahvaljujem višem savjetniku **Luki Čelikoviću** i prof. **Milanu Šariću** na dopuštenju da se dijelovi zbirke zadataka "Matematička natjecanja u Jugoslaviji 1989. godine - za učenike osnovnih škola" skeniraju i objave na http://public.carnet.hr/mat-natj .

Antonija Horvatek
http://public.carnet.hr/~ahorvate

DMM »PITAGORA« BELI MANASTIR

PRIREDILI:
MILAN ŠARIĆ — LUKA ČELIKOVIĆ

MATEMATIČKA NATJECANJA U JUGOSLAVIJI 1989. GODINE

ZA UČENIKE OSNOVNIH ŠKOLA

Beli Manastir, 1990.

MATEMATIČKA NATJECANJA OSNOVNOŠKOLACA U SFRJ
U 1989. GODINI

Priredili:
Milan Šarić
Luka Čeliković

Izdavač:
DRUŠTVO MLADIH MATEMATIČARA »PITAGORA«
BELI MANASTIR
Školska 3, 54300 Beli Manastir

Urednici:
Luka Čeliković
Milan Šarić

Tehnički urednik:
Branko Vujaklija

Tisak:
GP »Slovo« Beli Manastir

REPUBLIČKO NATJECANJE SRH 1989.

Zadaci:

VII razred:

1) Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrana je točka D, tako da su opsezi trokuta ABC, ACD i BCD redom 50 cm, 45 cm i 35 cm. Odredi duljinu dužine $\overline{CD}$.

2) Na vagi sa dvije zdjelice uspostavljena je ravnoteža pomoću dvije vrste kuglica različitih masa, tako da su na jednoj zdjelici samo kuglice mase a, a na drugoj samo kuglice mase b. Ukupan broj kuglica na obje zdjelice je 195. Ako sa jedne zdjelice uzmemo 11 kuglica, tada ponovnu ravnotežu možemo uspostaviti tako, da sa druge zdjelice uzmemo 2 kuglice i stavimo na zdjelicu sa koje smo maknuli 11 kuglica. Koliko je bilo kuglica svake vrste ?

3) Ako četveroznamenkasti broj napišemo obrnutim redoslijedom, novi četveroznamenkasti broj bit će 9 puta veći. Koji četveroznamenkasti broj ima to svojstvo ?

4) Ivica i Perica, učenici VII razreda, članovi su matematičke grupe koju čine "sedmaši" i "osmaši". U grupi je više od 70% "osmaša". Koliko je najmanje članova u ovoj grupi ?

5) Unutar kvadrata ABCD nalazi se točka P, takva da je trokut ABP jednakokračan s kutevima uz osnovicu $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 15^\circ$. Dokaži da je trokut PCD jednakostraničan.

VIII razred:

1) Kutevi trokuta odnose se kao 2:3:7. Najdulja stranica trokuta je 1 m. Odredi duljine ostalih dviju stranica.

2) Riješi najprije sustav jednadžbi: $x+py=3$, $px+4y=6$, a onda odredi vrijednost parametra p, tako da za rješenje (x,y) sustava jednadžbi vrijedi $|x-y|>1$.

3) U nekoj tvornici proizvode pakuju u pakete od po 3 kg i 5 kg. Dokaži da se ovim pakovanjima može isporučiti svaka narudžba veća od 7 kg.

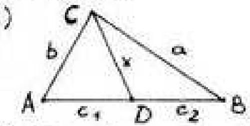
4) Odredi sve parove cijelih brojeva (x,y) koji zadovoljavaju jednadžbu $x^2-xy-2y^2=18$.

5) Zadan je paralelogram ABCD čija je površina 1. Središte M stranice $\overline{AD}$ spojeno je s vrhom B. Dužina $\overline{MB}$ siječe dijagonalu $\overline{AC}$ u točki Q. Odredi površinu četverokuta MQCD.

Rješenja:

VII razred:

1)



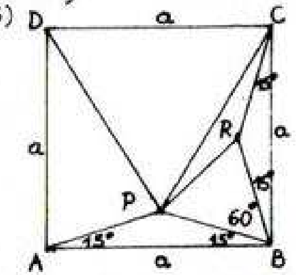
Zbrajanjem jednakosti $c_1+x+b=45$, $c_2+a+x=35$ i $a+b+c=50$ slijedi $2(a+b+c)+2x=130$, tj. $50+x=65$, odakle je $x=15$ cm.

2) Neka je na prvoj zdjelici x kuglica, svaka mase a. Tada je na drugoj zdjelici 195-x kuglica, svaka mase b. Iz $xa=(195-x)b$ i $(x-11)a+2b=(193-x)b$ izlazi $11a=4b$, a potom $x=143$, $y=52$.

3) Neka je $\overline{abcd}$ traženi broj. Tada vrijedi $\overline{abcd}\cdot 9=\overline{dcba}$, pa je $a=1$ (jer bi u suprotnom dobili peteroznamenkasti broj). Dalje iz $\overline{1bcd}\cdot 9=\overline{dcb1}$ slijedi da je $d=9$. Zatim iz $\overline{1bc9}\cdot 9=\overline{9cb1}$, tj. $(1000+100b+10c+9)\cdot 9=9000+100c+10b+1$, odnosno $89b+8=c$ izlazi da je $b=0$, a odatle $c=8$. Traženi broj je 1089.

4) Označimo broj članova grupe sa x. Kako je u grupi više od 70% "osmaša", "sedmaša je manje od 30%, a kako su bar dva člana (Ivica i Perica) "sedmaši", to je $2<0{,}30x$, tj. $x>\frac{20}{3}>6$. U grupi je najmanje 7 članova.

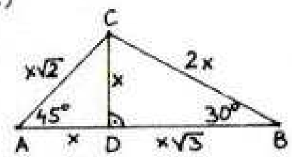
5)



Neka je R unutrašnja točka kvadrata ABCD, takva da je $BCR \cong ABP$. Tada je trokut PBR jednakostraničan (jer je $|PB|=|BR|$ i $\sphericalangle PBR=60^\circ$), pa iz $|PR|=|BR|=|RC|$ slijedi da je trokut PRC jednakokračan. Iz $\sphericalangle PRC=360^\circ-\sphericalangle PRB-\sphericalangle BRC=150^\circ$ slijedi sukladnost trokuta PRC i BRC, odakle je $|PC|=|BC|=a$. Analogno izlazi da je i $|PD|=a$, pa je trokut PCD jednakostraničan.

VIII razred:

1)



Kutevi trokuta su 30°, 45° i 105°. Neka je x duljina visine spuštene iz vrha najvećeg kuta na najdulju stranicu. Sada je očito duljina najveće stranice $x+x\sqrt{3}$, odakle je $x=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

pa je duljina jedne od traženih stranica $2x = \sqrt{3}-1$, a druge $x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

2) Za $p \in R \setminus \{-2,2\}$ zadani sustav jednadžbi ima rješenje $x = \frac{6}{p+2}$, $y = \frac{3}{p+2}$, za $p = 2$ sustav je neodredjen ($x = 3-2y$, $y \in R$), dok je za $p = -2$ sustav jednadžbi nemoguć.

Iz $|x-y| > 1 \Rightarrow |\frac{3}{p+2}| > 1 \Rightarrow \frac{|p+2|}{3} < 1 \Rightarrow |p+2| < 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow -3 < p+2 < 3 \Rightarrow -5 < p < 1$, $p \neq -2$. Dakle, $p \in (-5,-2) \cup (-2,1)$.

3) Treba pokazati da diofantska jednadžba $3x+5y = n$ ima rješenje $(x,y) \in N^2$ za svaki $n \in N$, $n > 7$, pri čemu **su** x **i** y količine paketa od po 3 kg i 5 kg, a n je ukupna narudžba izražena u kg. S obzirom na djeljivost brojem 3, svaki prirodni broj $n > 7$ može imati jedan od ova 3 oblika: $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$, $k > 2$.

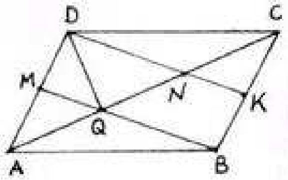
1°) Za $n = 3k$, $k > 2$, narudžbe se isporučuju samo u paketima od 3 kg.

2°) Za $n = 3k+1 = 3(k-3) + 2 \cdot 5$ narudžbe se isporučuju tako, da su 2 paketa od po 5 kg, a ostalih $(k-3)$, $k > 2$, od po 3 kg.

3°) Za $n = 3k+2 = 3(k-1) + 5$ narudžbe se isporučuju tako, da se isporuči jedan paket od 5 kg, a ostalih $(k-1)$, $k > 2$, od po 3 kg.

4) Zadanu jednadžbu možemo pisati u obliku $(x+y)(x-2y) = 18$. Kako je razlika $(x+y) - (x-2y) = 3y$ djeljiva sa 3, razlikovat ćemo ove slučajeve: $(x+y, x-2y) \in \{(3,6), (6,3), (-3,-6), (-6,-3)\}$, pa za rješenja zadatka dobivamo: $(x,y) \in \{(4,-1), (5,1), (-4,1), (-5,-1)\}$.

5)



Neka je K središte $\overline{BC}$. Tada je MBKD paralelogram, $\overline{NK}$ je srednjica trokuta AND, pa je $|AQ| = |QN| = |CN|$. Sada izlazi: $P(AQM) = \frac{1}{2}P(AQD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}P(ACD) = \frac{1}{6}P(ACD) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}P(ABCD) = \frac{1}{12}P(ABCD)$, pa je $P(MQCD) = P(ACD) - P(AQM) = \frac{5}{12}P(ABCD)$.