DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
REPUBLIKE HRVATSKE
1993. godina

VIII RAZRED

1. Riješi jednadžbu: $\frac{x^2}{x^2-9}=\frac{12-x}{x^2-9}$.

2. Neka su $x_0, x_1, x_2, ..., x_{1991}, x_{1992}$ uzastopni cijeli brojevi i neka je
$-x_0+x_1-x_2+x_3-...-x_{1990}+x_{1991}-x_{1992}=1993$
Koliki je broj x_{1992}?

3. U trokutu ABC nacrtane su težišnice $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$. Ako je $\angle BAD=\angle ABE=30°$, dokaži da je trokut ABC jednakostraničan.

4. Udaljenost mjesta A i mjesta B je 60 km. Biciklist je krenuo iz mjesta A u mjesto B, i čim je stigao u mjesto B, odmah je krenuo natrag u mjesto A. Nakon jednog sata vožnje od mjesta B stao je da bi se odmorio, a nakon 20 minuta odmora biciklist je nastavio voziti s 4 km na sat većom brzinom, pa je tako iz mjesta B u mjesto A stigao u jednakom vremenu kao kad je vozio iz mjesta A u mjesto B. Koliko brzinom je biciklist vozio iz mjesta A u mjesto B?

5. Zadan je trapez ABCD, pri čemu su duljine osnovica $|AB|=3\ cm$ i $|CD|=2\ cm$. Dijagonale trapeza sijeku se u točki S i dijele trapez na četiri trokuta. Površina trokuta BCS je $P(BCS)=\frac{6}{5}\ cm^2$. Kolika je površina svakog od preostala tri trokuta?

Rješenja zadataka

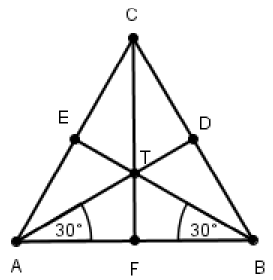
DRŽAVNO NATJECANJE UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA
REPUBLIKA HRVATSKA
1993. godina

VIII RAZRED

1. Ako su jednaki razlomci i jednaki nazivnici, moraju biti jednaki i brojnici, pa je $x^2 = 12 - x$. Ovu jednadžbu možemo pisati u obliku (x + 4)(x – 3) = 0. Kako je $x - 3 \neq 0$, jer nazivnik ne može biti jednak nuli, jedino rješenje daje x + 4 = 0 , tj. x = - 4.

2. Kako je $x_1 = x_0 + 1$, zaključujemo da je $-x_0 + x_1 = -x_0 + x_0 + 1 = 1$, odnosno $-x_2 + x_3 = 1$, …, $-x_{1990} + x_{1991} = 1$. Na temelju ovih činjenica zadanu jednakost možemo pisati kao $(-x_0 + x_1) + (-x_2 + x_3) + ... + (-x_{1990} + x_{1991}) - x_{1992} = 1993$, odnosno $996 - x_{1992} = 1993$, pa je $x_{1992} = -997$.

3. Neka je točka T težište trokuta ABC, točka F polovište stranice $\overline{AB}$, a $\overline{CF}$ treća težišnica. Kako je trokut ABT jednakokračan, slijedi da je $|AT| = |BT|$ i TF $\perp$ AB , pa je $\angle ATF = \angle BTF = 60°$. Zato je u trokutu AFT $|AT| = 2|FT|$, a zbog $|CT| = 2|FT|$ zaključujemo da je $|AT| = |CT|$, a to znači da je trokut ACT isto jednakokračan, pri čemu je $\angle ATC = 120°$ iz čega slijedi da je $\angle ACT = \angle CAT = 30°$, odnosno $\angle BAC = 60°$. Analogno je i trokut BCT jednakokračan, a zbog $\angle BTC = 120°$ slijedi da je $\angle BCT = \angle CBT = 30°$, odnosno $\angle ABC = 60°$.
Prema tome je $\angle BAC = \angle ABC = \angle BCA = 60°$, a trokut ABC jednakostraničan.



4. Neka je y brzina biciklista od A do B, a x vrijeme koje je biciklist proveo na putu od B do A, uključujući i odmor. Od mjesta B do mjesta gdje se odmarao biciklist je prešao y kilometara. Kako je brzina biciklista nakon odmora bila y + 4 kilometara na sat, a vrijeme koje je proveo vozeći bicikl nakon odmora do mjesta A $x - 1\frac{1}{3}$ sati, možemo pisati $(y+4)(x - 1\frac{1}{3}) + y = 60$, te nakon sređivanja dobivamo jednadžbu $3x^2 - 4x - 15 = 0$, odnosno (x – 3)(3x + 5) = 0. Pozitivno rješenje jednadžbe je x = 3.
Prema tome, biciklist je iz mjesta A u mjesto B vozio brzinom od 20 km na sat.

5. Iz činjenice da trokut ABC i trokut ABD imaju zajedničku osnovicu i jednake visine slijedi da imaju i jednake površine, tj. P(ABC) = P(ABD), a kako uz to imaju i zajednički dio, trokut ABS , zaključujemo da je P(BCS) = P(ADS) = $\frac{6}{5}$ cm^2. Neka je P(ABS) = a, P(CDS) = b i neka je v_1 visina trokuta ABS na $\overline{AB}$, a v_2 visina trokuta CDS na $\overline{CD}$.

Iz $a = \frac{|AB| \cdot v_1}{2} = \frac{3 \cdot v_1}{2}$ slijedi da je $v_1 = \frac{2}{3}a$, a iz $b = \frac{|CD| \cdot v_2}{2} = \frac{2 \cdot v_2}{2}$ slijedi da je $v_2 = b$, odnosno $v_1 + v_2 = \frac{2}{3}a + b = v$, pri čemu je v visina trapeza.

Kako je $P(ABC) = \frac{|AB|}{2} \cdot v = \frac{3}{2} \cdot (\frac{2}{3}a + b) = a + \frac{3}{2}b$, a uz to $P(ABC) = a + \frac{6}{5}$, vrijedi jednakost $a + \frac{3}{2}b = a + \frac{6}{5}$, tj. $b = \frac{4}{5}\ cm^2$. Isto tako iz

$P(BCD) = \frac{|CD|}{2} \cdot v = \frac{2}{2}(\frac{2}{3}a + b) = \frac{2}{3}a + b$ te iz P(BCD) = $b + \frac{6}{5}$ dobivamo

$\frac{2}{3}a + b = b + \frac{6}{5}$, tj. $a = \frac{9}{5}\ cm^2$.