ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

4. ožujka 1995. godine

I. razred

1. Na stranici $\overline{AB}$ trokuta ABC leže točke F, G, H tako da je F između A i G, a H između G i B. Ako je $|BH| = |BC|$, $|HG| = |HC|$, $|GF| = |GC|$, $|FA| = |FC|$, te $\sphericalangle CAB = 5°$, izračunajte koliki je $\sphericalangle ABC$.

2. Duljine stranica baze trostrane piramide jednake su a, b, c. Svi kutovi između bridova uz njezin vrh su pravi. Izračunajte volumen piramide.

3. Dokažite da za realne brojeve $a \neq b \neq c \neq a$ vrijedi sljedeći identitet

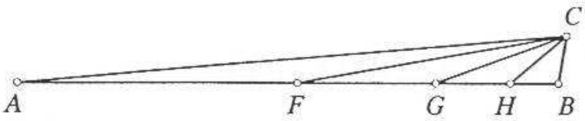
$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a+b+c.$$

4. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost

$$\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \ldots + \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} < \frac{n}{2}.$$

Rješenja za prvi razred

1. Po pretpostavci trokuti AFC, FGC, GHC i HBC su jednakokračni. Zato redom imamo:



$\sphericalangle FCA = \sphericalangle CAF = 5°$ 5 bodova

$\sphericalangle GCF = \sphericalangle CFG = 10°$ 5 bodova

$\sphericalangle HCG = \sphericalangle CGH = 20°$ 5 bodova

$\sphericalangle BCH = \sphericalangle CHB = 40°$ 5 bodova

$\sphericalangle BCA = 5° + 10° + 20° + 40° + 75°$ 5 bodova

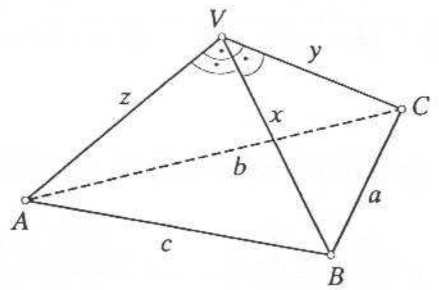
$\sphericalangle ABC = 180° - \sphericalangle BCA - \sphericalangle CAB = 100°$.

2. Neka su duljine bridova koji izlaze iz vrha piramide jednaki x, y, z. Svi ravninski kutevi uz vrh su pravi i iz Pitagorinog teorema dobivamo sistem jednadžbi

$a^2 = x^2 + y^2$

$b^2 = y^2 + z^2$

$c^2 = z^2 + x^2$. 5 bodova



Zbrajanjem ovih jednadžbi dobijemo

$$x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

a odavde redom

$$x=\sqrt{\frac{a^2-b^2+c^2}{2}},\ y=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\ z=\sqrt{\frac{-a^2+b^2+c^2}{2}}.$$ 10 bodova

Volumen piramide jednak je $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{xy}{2}\cdot z=\frac{1}{6}xyz$

$$V=\frac{1}{24}\sqrt{2(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)(-a^2+b^2+c^2)}.$$ 10 bodova

3. $$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=$$
$$\frac{(c-b)a^3+(a-c)b^3+(b-a)c^3}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{(c-b)a^3+a(b^3-c^3)-bc(b^2-c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{(b-c)[-a^3+a(b^2+bc+c^2)-bc(b+c)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{(b-c)[-a(a^2-b^2)+bc(a-b)+c^2(a-b)]}{(a-b)(b-c)(c-a)}=$$
$$=\frac{(b-c)(a-b)(-a^2-ab+bc+c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=a+b+c.$$ 25 bodova

4. Pokazat ćemo da je svaki sumand na lijevoj strani manji od $\frac{1}{2}$.
10 bodova

$$\frac{\sqrt{k(k+1)}}{2k+1}<\frac{1}{2}\quad\Longleftrightarrow$$
$$4k(k+1)<(2k+1)^2\quad\Longleftrightarrow\quad 0<1.$$

Kako je ova tvrdnja istinita i kako na lijevoj strani nejednakosti ima n sumanada, to je i polazna tvrdnja istinita. 15 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika srednjih škola Republike Hrvatske

4. ožujka 1995. godine

II. razred

1. Dokažite da je izraz

$$\sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$$

racionalan broj.

2. Dokažite da jednadžba $x^2-(a+c)x+ac-b^2=0$ ima realna rješenja x_1 i x_2 za bilo koje realne koeficijente a, b i c, te da su a i c rješenja jednadžbe $(y-x_1)(y-x_2)+b^2=0$.

3. Neka je z kompleksan broj takav da je $|z|=2$. Odredite minimum i maksimum izraza

$$\left|z-\frac{1}{z}\right|.$$

4. Unutar trokuta ABC nalazi se točka R. Paralela sa stranicom $\overline{AB}$ kroz R siječe stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ u točkama M i N, paralela sa stranicom $\overline{AC}$ kroz R siječe $\overline{BC}$ i $\overline{AB}$ u točkama E i F, a paralela sa stranicom $\overline{BC}$ kroz R siječe $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u K i P. Površine trokuta NER, PMR i FKR iznose redom a^2, b^2, c^2. Odredite površinu trokuta ABC.

Rješenja zadataka za drugi razred

1. Racionalizacijom izraza pod korijenom dobiva se

$\sqrt{(3-2\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})}-\sqrt{(3+2\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})}=$

$=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}=$ 15 bodova

$=(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)=2.$ 10 bodova

2. Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe je

$D=(a+c)^2-4(ac-b^2)=(a-c)^2+(2b)^2\geq 0$

što znači da su oba korijena x_1 i x_2 realna. 10 bodova

Prema Vieteovim formulama je

$x_1+x_2=a+c, \quad x_1\cdot x_2=ac-b^2.$ 5 bodova

Drugu jednadžbu zapišimo u obliku $y^2-(x_1+x_2)y+x_1x_2+b^2=0.$

Uvrštavanjem gornjih formula dobivamo $(y-a)(y-c)=0$ što znači da su korijeni druge jednadžbe $y_1=a$ i $y_2=c.$ 10 bodova

3. $\left|z-\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{z^2-1}{z}\right|=\frac{1}{2}\cdot|z^2-1|$ 5 bodova

$|z^2-1|\leq|z^2|+1=|z|^2+1=5$ 5 bodova

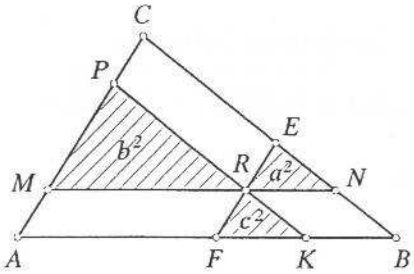
$|z^2-1|\geq|z^2|-1=|z|^2-1=3$ 5 bodova

Odavde slijedi da je $\left|z-\frac{1}{z}\right|\in[\frac{3}{2},\frac{5}{2}].$

Za $z=2$ je $\left|z-\frac{1}{z}\right|=\frac{3}{2}.$ 5 bodova

Za $z=2i$ je $\left|z-\frac{1}{z}\right|=\left|2i-\frac{1}{2i}\right|=\left|2i+\frac{i}{2}\right|=\frac{5}{2}.$ 5 bodova

4. Trokuti NER i PMR su slični radi čega je $|MP| : |RE| = b : a$.



Kako je $|RE| = |PC|$ to je $|MP| : |PC| = b : a$. Trokuti PMR i PCR imaju jednaku visinu pa je

$P_{PMR} : P_{PCR} = |MP| : |PC| = b : a$

odakle slijedi $P_{PCR} = \frac{a}{b} \cdot b^2 = ab$ i $P_{RECP} = 2ab$. 15 bodova

Analogno se dobiva $P_{RMAF} = 2bc, P_{RKBN} = 2ac$ i dobivamo

$P_{ABC} = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$. 10 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA
REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

4. ožujka 1995. godine

III. razred

1. Riješite jednadžbu

$$\log_{(x+1)}(x^3 - 9x + 8) \cdot \log_{(x-1)}(x+1) = 3.$$

2. Riješite jednadžbu

$$1 + \cos 4x = m(\sin x - \cos x)^2$$

i diskutirajte njezino rješenje u ovisnosti o $m \in \mathbf{R}$.

3. Neka je O središte upisane kružnice trokuta ABC. Dokažite da vrijedi

$$|AO|^2 \cdot |BC| + |BO|^2 \cdot |AC| + |CO|^2 \cdot |AB| = |AB| \cdot |BC| \cdot |CA|.$$

4. Konstruirajte trokut ABC ako je zadan opseg $a + b + c$, kut α i duljina h_a visine na stranicu $\overline{BC}$. Rasprava!

Rješenja za treći razred

1. Jednadžbu zapišemo u ovom obliku

$$\frac{\log(x^3-9x+8)}{\log(x+1)} \cdot \frac{\log(x+1)}{\log(x-1)} = 3$$

odakle slijedi $x^3 - 9x + 8 = (x-1)^3$. 10 bodova

Nakon sređivanja dobiva se jednadžba $x^2 - 4x + 3 = 0$ čija su rješenja $x_1 = 1, x_2 = 3$. 10 bodova

Rješenje $x_1 = 1$ otpada zbog uvjeta $x - 1 > 0$. 5 bodova

Lako se provjeri da je $x = 3$ rješenje polazne jednadžbe.

2. U sljedećih nekoliko koraka jednadžbu ćemo svesti na jednostaviniji oblik

$$1 + \cos^2 2x - \sin^2 2x = m(\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x)$$

$$2(1 - \sin^2 2x) = m(1 - \sin 2x)$$

$$2(1 - \sin 2x)(1 + \sin 2x) = m(1 - \sin 2x)$$

$$(1 - \sin 2x)(2\sin 2x + 2 - m) = 0$$ 5 bodova

$1^\circ \quad \sin 2x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 5 bodova

$2^\circ \quad \sin 2x = \frac{m}{2} - 1$

Ova jednadžba ima rješenje za $\frac{m}{2} - 1 \in [-1, 1]$, tj. za $m \in [0, 4]$.

Odavde se dobivaju rješenja

$$x = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{m}{2} - 1) + k\pi, \quad m \in [0, 4]$$

$$x = -\frac{1}{2}\arcsin(\frac{m}{2} - 1) + (k + \frac{1}{2})\pi, \quad m \in [0, 4].$$ 15 bodova

3. Sa slike se vidi da je $|AO| = \dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

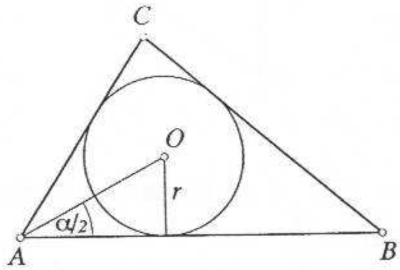
Iz kosinusovog teorema $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ dobivamo

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \text{ tj.}$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{4bc} =$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4} \cdot \frac{1}{bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

Sada je $|AO|^2 = \dfrac{r^2}{\sin^2 \dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{r^2 bc}{(s-b)(s-c)}$. 10 bodova



Analogne jednakosti vrijede i u preostalim slučajevima za $|BO|^2$ i $|CO|^2$ pa je lijeva strana jednakosti jednaka

$$\frac{r^2abc}{(s-b)(s-c)} + \frac{r^2abc}{(s-b)(s-a)} + \frac{r^2abc}{(s-a)(s-c)} =$$

$$= \frac{r^2abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}(s-a+s-b+s-c) =$$

$$= \frac{r^2abc \cdot s}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{P^2 \cdot abc}{P^2} = abc,$$

što je jednako desnoj strani. 10 bodova

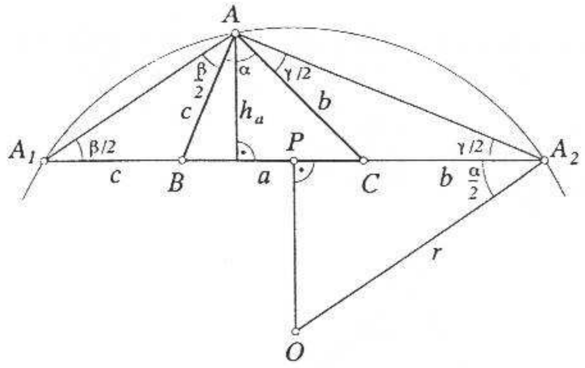
4. **Analiza:** Na pravcu BC, gdje je, $|BC| = a$ odaberemo točke A_1 i A_2 tako da bude $|A_1B| = |AB| = c$, $|CA_2| = |CA| = b$ i $|A_1A_2| = a+b+c$.

Promatrajmo trokut AA_1A_2 kojem je opisana kružnica sa središtem u točki O.

$\sphericalangle AA_1A_2 = \sphericalangle BAA_1 = \dfrac{1}{2}\sphericalangle ABC = \dfrac{\beta}{2}$ i

$\sphericalangle A_1A_2A = \sphericalangle A_2AC = \dfrac{1}{2}\sphericalangle BCA = \dfrac{\gamma}{2}$,

$\sphericalangle A_2AA_1 = \sphericalangle BAA_1 + \sphericalangle CAB + \sphericalangle A_2AC = \alpha + \dfrac{\beta+\gamma}{2} = \alpha + \dfrac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.



$\measuredangle A_2OA_1 = 2 \cdot \measuredangle A_2AA_1 = 180^\circ + \alpha$, pa je $\measuredangle A_1OA_2 = 180^\circ - \alpha$ odakle se dobije $\measuredangle A_2A_1O = \measuredangle OA_2A_1 = \dfrac{\alpha}{2}$. 10 bodova

Opis konstrukcije: Konstruiramo središte O kružnice.

Dio kružnog luka A_1AA_2 sa središtem u točki O polumjera $\overline{OA_1}$ sadrži točke iz kojih se dužina $\overline{A_1A_2}$ vidi pod kutem $90^\circ + \dfrac{\alpha}{2}$.

Sada je $|OP| = \dfrac{1}{2}|A_1A_2| \operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{2}$. Konstruiramo pravac paralelan pravcu A_1A_2 na udaljenosti h_a od njega. Taj pravac siječe kružnicu u točki koja je vrh A traženog trokuta. Simetrale dužina AA_1 i AA_2 sijeku pravac A_1A_2 u točkama B i C trokuta. 10 bodova

Diskusija: Ako je $|OP| + h_a < r = \dfrac{a+b+c}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$ ili

$$\frac{a+b+c}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + h_a < \frac{a+b+c}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}} \text{ tj.}$$

$h_a < \dfrac{a+b+c}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2})$, postoje dva rješenja.

Ako je $h_a = \dfrac{a+b+c}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$, postoji jedno rješenje.

Ako je $h_a > \dfrac{a+b+c}{2\cos\alpha 2}\left(1 - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$, nema nijedno rješenje. 5 bodova

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO MINISTARSTVA PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko–gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

4. ožujka 1995. godine

IV. razred

1. Za broj $x \in (1,2)$ definiran je niz

$$a_0 = 1$$
$$a_n = \frac{a_{n-1}}{\log_x 2} + 1, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Dokažite da je $\quad a_n < \log_{\frac{2}{x}} 2$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

2. Dana je pravilna trostrana prizma. Odredite kut između dijagonale pobočke i pravca koji prolazi težištem osnovice i polovištem nasuprotnog bočnog brida. Poznato je da se duljina stranice osnovice i duljina visine prizme odnose kao $1 : \sqrt{3}$.

3. Pravci $x + y + 4 = 0$ i $7x - y + 4 = 0$ su tangente kružnice čije središte je na pravcu $4x + 3y - 2 = 0$. Nađite jednadžbu te kružnice.

4. Neka je z kompleksan broj takav da je $|z| = 1$. Dokažite da je

$$2 \leq |z-1| + |z+1| \leq 2\sqrt{2}.$$

Kada vrijede znakovi jednakosti?

Rješenja za četvrti razred

1. Uvedimo supstituciju $z = \log_2 x$ i primijetimo da je $z \in (0,1)$. Sada vrijedi

$a_0 = 1,\ a_n = z \cdot a_{n-1} + 1,\ n \in \mathbf{N}$.

Indukcijom se pokazuje da je

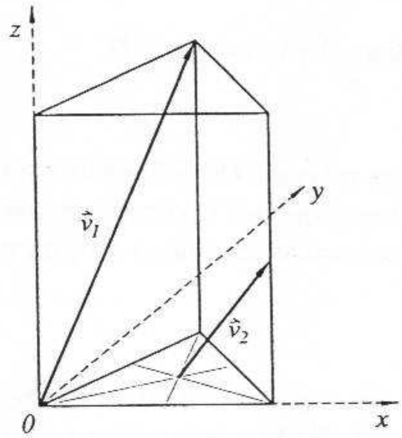
$$a_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \sum_{k=0}^{n} z^k,$$

$$a_n = \frac{1 - z^{k+1}}{1 - z} < \frac{1}{1 - z}, \text{ jer je } z \in (0,1), \tag{1}$$

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{1 - \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 2 - \log_2 x} = \frac{1}{\log_2 \frac{2}{x}} = \log_{\frac{2}{x}} 2. \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi $a_n < \log_{\frac{2}{x}} 2$. 25 bodova

2. Uvedimo koordinatni sustav kao na slici.



Treba odrediti kut između vektora $\vec{v}_1 = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\sqrt{3}\vec{j} + v\vec{k}$ i

$\vec{v}_2 = \frac{a}{2}\vec{i} - \frac{a}{6}\sqrt{3}\vec{j} + \frac{v}{2}\vec{k}$.

Odredimo koliki je cos tog kuta pomoću skalarnog produkta:

$$\cos \sphericalangle(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{12} + \frac{v^2}{2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} + v^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{36} + \frac{v^2}{4}}} = \sqrt{\frac{12}{13}}$$

Traženi kut jednak je $\arccos \sqrt{\frac{12}{13}} = 22°40'$. 25 bodova

3. Neka je središte kružnice u točki (h, k). Tada je

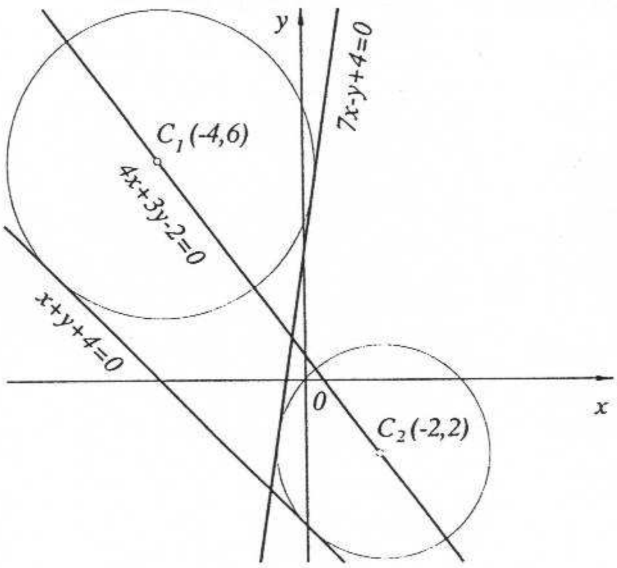
$$\frac{h+k+4}{\sqrt{2}} = \pm\frac{7h-k+4}{5\sqrt{2}} \quad \text{tj.} \quad h-3k-8=0 \ \text{ i } \ 3h+k+6=0.$$

(Ovo su jednadžbe simetrala kuteva između ta dva pravca.)

Kako središte leži na pravcu $4x+3y-2=0$ to je $4h+3k-2=0$.

Iz ove jednadžbe i $h-3k-8=0$ dobije se $h=2$, $k=-2$. Sada je $r = \dfrac{2-2+4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$, i jedna jednadžba kružnice je $(x-2)^2+(y+2)^2=8$.

Iz jednadžbi $4h+3k-2=0$ i $3h+k+6=0$ dobije se $h=-4, k=6$ i $r=3\sqrt{2}$. Jednadžba ove kružnice je $(x+4)^2+(y-6)^2=18$.

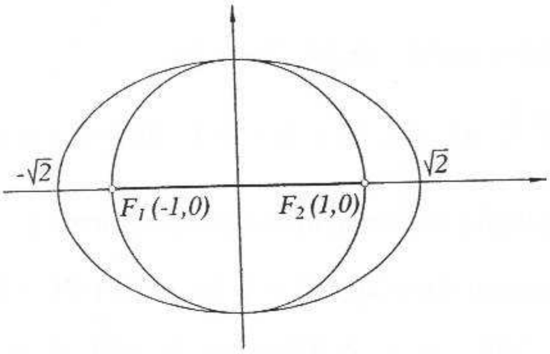


Za točno određena središta	10 bodova
Za točno određene polumjere	10 bodova
Za jednadžbe	5 bodova

4. Jednadžbu $|z|=1$ zadovoljavaju sve točke na jediničnoj kružnici. Prema definiciji elipse, jednadžbu $|z-1|+|z+1|=2\sqrt{2}$ zadovoljavaju sve točke elipse sa žarištima $F_1(-1,0)$ i $F_2(1,0)$. Elipsa siječe y-os u točkama $\pm ai$. Tada se iz $|ai-1|+|ai+1|=2\sqrt{2}$ dobiva $a=1$. To znači da jedinična kružnica leži unutar elipse. Zato je za sve točke z na jediničnoj kružnici

$|z-1|+|z+1| \leq 2\sqrt{2}$. 10 bodova

Jednakost vrijedi za točke $z=i$ te $z=-i$, koje leže na elipsi. 5 bodova



S druge strane, jednadžbu $|z-1|+|z+1|=2$ zadovoljavaju sve točke dužine $\overline{F_1F_2}$, tj. brojevi a za $-1 \leq a \leq 1$. Kako su sve te točke unutar ili na rubu jedinične kružnice to mora biti

$|z-1|+|z+1| \geq 2.$ 5 bodova

Jednakost vrijedi za točke $z=1$ i $z=-1$ koje leže na elipsi. 5 bodova