

REPUBLIKA HRVATSKA  
MINISTARSTVO PROSVJETE I SPORTA  
U P R A V A   Z A   N A D Z O R  
Područna jedinica Osijek

HRVATSKO MATEMATICKO DRUSTVO  
Podružnica Osijek  
Požeško matematičko društvo  
Podružnica Zupanije Vukovarsko-srijemske

5. REGIONALNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE  
ZA UČENIKE VI. RAZREDA OSNOVNIH SKOLA  
ŽUPANIJA:  
OSJECKO-BARANJSKE, POŽEŠKO-SLAVONSKE, VUKOVARSKO-SRIJEMSKA,  
BRODSKO-POSAVSKE I VIROVITICKO-PODRAVSKE

Požega, 25. svibnja 1996. godine

Z a d a c i :

1. Izračunati:

$$I = \frac{1 - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}}, \text{ ako je } x = -\frac{1}{5}$$

2. Dva igrača igraju igru. Prvi kaže jedan broj od 1 do 10, drugi tom broju pribroji svoj broj od 1 do 10, na taj zbroj prvi ponovno dodaje proizvoljan broj od 1 do 10, ... Pobjeđuje onaj tko prvi stigne do zbroja 100. Pomožite prvom igraču da sigurno dobije igru. Obrazložite odgovor!

3. Dan je niz brojeva  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Zbroj prva dva broja jednak je trećem broju ( $a_1 + a_2 = a_3$ ), zbroj drugog i trećeg broja jednak je četvrtom broju ( $a_2 + a_3 = a_4$ ), zbroj trećeg i četvrtog broja jednak je petom broju ( $a_3 + a_4 = a_5$ ), ... Ako je peti broj jednak 1, izračunati zbroj  $S_6$  prvih 6 brojeva!

4. Zbroj znamenaka traženog dvoznamenkastog broja  $A$  je 14. Ako od tog broja  $A$  oduzmemo prirodan broj  $a$ , dobivamo dvoznamenkasti broj  $B$  zamijenjenih znamenki (u odnosu na broj  $A$ ). Što sve može biti broj  $a$ ? Što sve možemo uzeti za dvoznamenkasti broj  $A$ ?  
Izvršiti raspravu (diskusiju)!
5. Dan je kvadrat  $ABCD$ . Ako su  $E$  i  $F$  redom polovišta stranica  $\overline{BC}$  i  $\overline{CD}$ , dokazati da se  $\overline{AE}$  i  $\overline{BF}$  sijeku pod pravim kutom!

(SVAKI ISPRAVNO I POTPUNO RIJESEN ZADATAK S OBRAZLOŽENJEM  
VREDNUJE SE S 10 BODOVA).

**REGIONALNO NATJECANJE**  
**1996. godina**  
**Slavonija - Osječka regija**  
**RJEŠENJA - 6. RAZRED**

**1.**

1. način:

$$I = \frac{1 - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-x+1}{x+1}}{\frac{x+1+x^2-x}{x+1}} = \frac{2}{x^2+1} = \frac{2}{\left(\frac{1}{9}\right)^2+1} = \frac{2}{\frac{1}{81}+1} = \frac{\frac{2}{1}}{\frac{82}{81}} = \frac{81}{41}$$

2. način:

$$I = \frac{1 - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}} = \frac{1 - \frac{\frac{1}{9}-1}{\frac{1}{9}+1}}{1 + \frac{\frac{1}{9}\left(\frac{1}{9}-1\right)}{\frac{1}{9}+1}} = \frac{1 - \frac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{9}}}{1 + \frac{\frac{1}{9} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)}{\frac{10}{9}}} = \frac{1 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{45}} = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{41}{45}} = \frac{81}{41}.$$

**2.** Krenimo unazad. Prvi će stići do zbroja 100 (a time i pobijediti) onaj tko prvi stigne do zbroja 89, jer je  $100-89=11$ , pa koji god  $x \in \{1,2,3,\dots,10\}$  kaže protivnik, ovome će uvijek ostati broj  $11-x \in \{1,2,3,\dots,10\}$  kojim dolazi do konačnog zbroja 100. Gledamo dalje unazad. Do zbroja 89 prvi će stići onaj tko prvi stigne do zbroja 78 jer je  $89-78=11$ , pa koji bi god broj  $y \in \{1,2,3,\dots,10\}$  rekao protivnik, ovome će ostati broj  $11-y \in \{1,2,3,\dots,10\}$  kojim dolazi do zbroja 89. Nastavljajući put unazad, vidimo da pobjeđuje onaj tko prvi stigne do zbrojeva 67, 56, 45, 34, 23, 12 i konačno do broja 1.

Dakle, prvi mora reći broj 1, a zatim redom dobivati zbrojeve 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 i konačno 100.

**3.** Neka je  $a_1=x$ ,  $a_2=y$ . Iz uvjeta zadatka tada proizlazi:

$$a_3 = a_1 + a_2 = x + y$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = y + (x+y) = x + 2y$$

$$a_5 = a_3 + a_4 = (x+y) + (x+2y) = 2x + 3y$$

$$a_6 = a_4 + a_5 = (x+2y) + (2x+3y) = 3x + 5y$$

...

Kako je  $a_5=1$ , tada je  $2x+3y=1$  (\*), pa je zbroj prvih šest brojeva:

$$\begin{aligned} S_6 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= x + y + (x + y) + (x + 2y) + (2x + 3y) + (3x + 5y) \\ &= 8x + 12y \\ &= 4 \cdot (2x + 3y) \quad (\text{iskoristimo jednakost (*)}) \\ &= 4 \cdot 1 = 4. \end{aligned}$$

4.  $A = \overline{x(14-x)} = 10x + (14-x) = 9x = 14$  traženi dvoznamenkasti broj,  
 $B = \overline{(14-x)x} = 10 \cdot (14-x) + x = 140 - 9x$  dvoznamenkasti broj zamijenjenih znamenki,  $x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ ,  $A - a = B$ ,  $a \in \mathbb{N}$ ,  $9x + 14 - a = 140 - 9x$ ,  $18x = 126 + a$  : 18,  
 $x = \frac{126+a}{18}$ ,  $x = 7 + \frac{a}{18}$ . Kako je  $x \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  i  $a \in \mathbb{N}$ , iz toga slijedi da je  $a \in \{18, 36\}$ ,  
odnosno  $x \in \{8, 9\}$  i  $14 - x \in \{6, 5\}$ , tj.

a	18	36
$\frac{a}{18}$	1	2
$x = 7 + \frac{a}{18}$	8	9
14-x	6	5

Traženi brojevi (A) su 86 i 95.

Pokus (provjera):  $A - a = B$ ,  $86 - 18 = 68$ ,  $68 = 68$ ;  
 $A - a = B$ ,  $95 - 36 = 59$ ,  $59 = 59$ .

5. Neka su ispunjeni uvjeti zadatka i neka je  $G = \overline{AE} \cap \overline{BF}$  (djelište dužina  $\overline{AE}$  i  $\overline{BF}$ ). Ako je duljina stranice kvadrata jednaka a, tada je  $|BE| = |CF| = \frac{a}{2}$ . Iz

sukladnosti trokuta EAB i FBC ( $|AB| = |BC| = a$ ,  $|BE| = |CF| = \frac{a}{2}$ ,

$\sphericalangle ABE = \sphericalangle BCF = 90^\circ$ ) slijedi  $\sphericalangle EAB = \sphericalangle FBC = \varphi$ ,  $\sphericalangle BEA = \sphericalangle CFB = \psi$ . Kako je (u pravokutnim trokutima EAB i FBC)  $\varphi + \psi = 90^\circ$ , tada je (u trokutu BEG)

$\sphericalangle BGE = 180^\circ - (\varphi + \psi) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , tj.  $\overline{BG} \perp \overline{GE}$ , odnosno  $\overline{AE} \perp \overline{BF}$ .

