MINISTARSTVO PROSVJETE I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

MATEMATIKA

Zadaci za općinsko-gradsko natjecanje učenika
srednjih škola Republike Hrvatske

16. ožujka 1996. godine

3. razred

1. Riješite jednadžbu

$$2\log_9^2 x = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1}-1).$$

2. Zadana je funkcija $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

   (a) Odredite sve realne brojeve m za koje jednadžba $f(x) = m$ ima rješenje.

   (b) Riješite jednadžbu $f(x) = 1$.

   (c) Nađite maksimum funkcije $f(x)$ i odredite za koje vrijednosti x se on postiže.

   (Uputa: Prikažite funkciju $f(x)$ u obliku $a\sin(bx+c)$, gdje su a, b, $c \in \mathbf{R}$.)

3. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ s kutovima α, β, γ i δ od kojih nijedan nije pravi. Dokažite da vrijedi ovaj identitet

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta.$$

4. Oko kružnice polumjera r opisan je trapez kojemu su kutovi uz dulju osnovicu α i β. Dokažite da je omjer površina trapeza i kruga jednak

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$

Rješenja zadataka za treći razred

1. Dana jednadžba ekvivalenta je redom sa

$2(\frac{1}{2}\log_3 x)^2 = \log_3 x \cdot \log_3(\sqrt{2x+1}-1)$,

$\log_3 x(\frac{1}{2}\log_3 x - \log_3(\sqrt{2x+1}-1) = 0$. 10 bodova

Treba, dakle, riješiti jednadžbe

$\log_3 x = 0, \qquad \frac{1}{2}\log_3 x - \log_3(\sqrt{2x+1}-1) = 0$. 2 boda

Rješenje prve jednadžbe je $x = 1$, 3 boda

a druga jednadžba je ekvivalentna sa

$\sqrt{x} = \sqrt{2x+1} - 1$

$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{2x+1} \quad /^2$

$2\sqrt{x} = x \quad /^2$

pa je $x = 4$. 10 bodova

Rješenja polazne jednadžbe su $x = 1$ i $x = 4$.

2. Transformirajmo jednadžbu u pogodniji oblik:

$f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x) =$

$= 2(\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$. 7 bodova

(a) Promatrajmo jednadžbu

$f(x) = m$ tj. $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{m}{2}$.

Ona ima rješenje ako i samo ako je $\frac{m}{2} \in [-1, 1]$, odnosno ako i samo ako je $m \in [-2, 2]$. 3 boda

(b) Jednadžbu $f(x) = 1$ možemo zapisati u obliku

$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$,

odakle slijedi $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ili $x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$.

Rješenja su oblika $x = 2k\pi$ i $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in Z$. 10 bodova

(c) Funkcija $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$ ima maksimum 2. Treba naći one vrijednosti x za koje je

$\sin(x + \frac{\pi}{6}) = 1$.

Dobijemo, $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Maksimum se postiže za $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in Z$. 5 bodova

2. III. R

3. Prvo rješenje:
Možemo pretpostaviti da je $\alpha+\beta\neq 90^\circ$ i $\alpha+\beta\neq 270^\circ$. (Dovoljno je, npr. uzeti da je α najmanji i β najveći kut. Tada je $0<\alpha\le 90^\circ$ i $90^\circ<\beta<180^\circ$ pa je $90^\circ<\alpha+\beta<270^\circ$.) Tada je i $\gamma+\delta\neq 90^\circ$ i $\gamma+\delta\neq 270^\circ$. 5 bodova
Vrijedi ova jednakost

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(360^\circ-(\gamma+\delta))=-\operatorname{tg}(\gamma+\delta)$, tj.

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\gamma+\delta)=0$ 5 bodova

i nadalje

$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}+\frac{\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta}{1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}=0.$ 5 bodova

Kada ovo sredimo dobijemo

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta$

5 bodova

Dijeljenjem s $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta$ dobivamo traženu jednakost. 5 bodova

Drugo rješenje: Isto tako možemo pretpostaviti da je $\alpha+\beta\neq 90^\circ$ i $\alpha+\beta\neq 270^\circ$. 5 bodova
Vrijedi ova jednakost

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}(360^\circ-\delta)=-\operatorname{tg}\delta$, tj.

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)+\operatorname{tg}\delta=0.$ 5 bodova

Sada računamo

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\operatorname{tg}((\alpha+\beta)+\gamma)=\ldots=$

$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)}.$ 5 bodova

Sada vrijedi

$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma)}+\operatorname{tg}\delta=0,$

odnosno

$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta+$
$+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta.$ 5 bodova

Dijeljenjem s $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta$ dobijemo traženu jednakost. 5 bodova

4. Prvo rješenje:

Označimo sa C_1 i D_1 nožišta okomica spuštenih iz C i D na AB. Iz trokuta AD_1D dobivamo $|AD|=d=\frac{2r}{\sin\alpha}$, a iz trokuta BCC_1 $|BC|=b=\frac{2r}{\sin\beta}$.
10 bodova

Četverokut $ABCD$ je tangencijalan pa je $a+c=b+d$. 5 bodova
Odredimo površinu trapeza:

$P_{ABCD}=\frac{1}{2}(a+c)v=\frac{1}{2}(b+d)\cdot 2r=r(b+d)=$ 3 boda

$=r(\frac{2r}{\sin\alpha}+\frac{2r}{\sin\beta})=2r^2(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}).$ 5 bodova

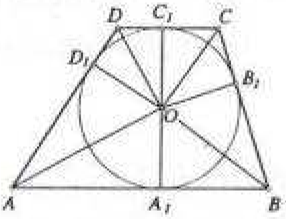
Kako je površina kruga jednaka $r^2\pi$ traženi omjer je jednak

$\frac{2}{\pi}(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}).$ 2 boda

3.

III. razred

Drugo rješenje:



Označimo točke dodira trapeza i upisane kružnice s A_1, B_1, C_1, D_1. Označimo $|AD_1| = |AA_1| = x$, $|BA_1| = |BB_1| = y$, $|CB_1| = |CC_1| = z$, $|DC_1| = |DD_1| = w$. Tada je površina trapeza $P = rs = r(x + y + z + w)$, (s je poluopseg). 5 bodova

Iz trokuta OAA_1 imamo $x = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Analogno je $y = r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$.

Iz trokuta OCC_1 je $z = r\operatorname{ctg}\frac{\pi-\alpha}{2} = r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ i slično $w = r\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. 10 bodova

Stoga je

$$P = r^2(\operatorname{ctg}\tfrac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\tfrac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\tfrac{\beta}{2}).$$

Iz $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{2}{\sin 2x}$, slijedi

$$P = 2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$ 8 bodova

Kako je površina kruga jednaka $r^2\pi$ traženi omjer je jednak

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\beta}\right).$$ 2 boda