MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

DRŽAVNO NATJECANJE MLADIH MATEMATIČARA REPUBLIKE HRVATSKE

Kraljevica, 27. travnja 2006.

Zadaci za 7. razred

1. Ako je $\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{11}{10}$ i $\frac{b}{c} = \frac{5}{2}$, odredi razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{a}{c}$.

2. Odredi sve četveroznamenkaste brojeve $\overline{abba}$ tako da vrijedi $\overline{aa} \cdot \overline{10b} = \overline{abba}$, pri čemu je $a \neq b$.

3. Bazen se puni vodom s tri cijevi. Ako ga pune samo prva i druga cijev, bazen se napuni za 20 minuta, ako ga pune druga i treća cijev, napuni se za 15 minuta, a ako ga pune treća i prva cijev, bazen se napuni za 12 minuta. Za koliko se vremena napuni bazen ako se puni sa sve tri cijevi?

4. Zadan je trokut ABC kojemu su duljine stranica tri uzastopna prirodna broja. Neka je točka P polovište stranice $\overline{BC}$ i neka je simetrala kuta $\measuredangle ACB$ okomita na dužinu $\overline{AP}$. Kolike su duljine stranica trokuta ABC?

5. Zadan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{CD}$ odabrana je točka E, tako da je $|DE| : |EC| = 2 : 3$, a točka F je polovište stranice $\overline{BC}$. Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{DF}$ sijeku se u točki M. Što je veće: površina trokuta AFM ili površina četverokuta $MFCE$?

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

RJEŠENJA ZA 7. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Kako je $\frac{b}{c}=\frac{5}{2}$, slijedi da je $b=\frac{5c}{2}$, pa nakon zamjene u jednakost $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{11}{10}$ imamo

$$\frac{a}{\frac{5c}{2}}+\frac{a}{c}=\frac{11}{10},\quad \frac{2a}{5c}+\frac{a}{c}=\frac{11}{10},\quad \frac{2a}{5c}+\frac{5a}{5c}=\frac{11}{10},\quad \frac{7a}{5c}=\frac{11}{10},\quad \frac{7}{5}\cdot\frac{a}{c}=\frac{11}{10},$$

odakle je $\frac{a}{c}=\frac{11}{10}\cdot\frac{5}{7}=\frac{11}{14}$. Sada je $\frac{a}{b}+\frac{11}{14}=\frac{11}{10}$, pa je $\frac{a}{b}=\frac{11}{10}-\frac{11}{14}=\frac{77-55}{70}=\frac{22}{70}=\frac{11}{35}$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

2. Očito vrijedi $\overline{abba}=1000a+100b+10b+a=1001a+110b=11\cdot 91a+11\cdot 10b=11(91a+10b)$, $\overline{aa}=10a+a=11a$ i $\overline{10b}=100\cdot 1+b=100+b$.
Uvrstimo li dobivene prikaze brojeva u uvjet $\overline{aa}\cdot\overline{10b}=\overline{abba}$ slijedi da je $11a(100+b)=11(91a+10b)$, odnosno nakon kraćenja s 11 i oslobađanja zagrada, $100a+ab=91a+10b$. Iz tog uvjeta slijedi $9a+ab=10b$, tj.

$$a(9+b)=10b. \tag{1}$$

Kako je $10b$ djeljivo s 10, onda i $a(9+b)$ mora biti djeljivo s 10, pa imamo četiri slučaja:

1. Ako je $9+b$ djeljivo s 10, slijedi da je $b=1$, pa je iz (1) $10a=10$, odnosno $a=1$ što nije moguće jer je $a\neq b$.
2. Ako je a djeljivo s 10 slijedi da je $a=0$ što je nemoguće jer tražimo četveroznamenkaste brojeve.
3. Ako je $9+b$ djeljivo s 5 i a djeljivo s 2, slijedi da je
   (a) $b=1$, pa je 10a=10, tj. $a=1$ što je nemoguće,
   (b) $b=6$, pa je $15a=60$, odnosno $a=4$.
4. Ako je $9+b$ djeljivo s 2 i a djeljivo s 5, slijedi da je
   (a) $a=0$, što je nemoguće,
   (b) $a=5$, pa je $5(9+b)=10b$, odnosno $b=9$.

Prema tome, traženi četveroznamenkasti brojevi su 4664 i 5995.

.... UKUPNO 10 BODOVA

3. Neka su x, y i z vremena (izražena u minutama), redom potrebna da se napuni bazen, ako ga puni samo prva, samo druga ili samo treća cijev.
Prva i druga cijev pune bazen za 20 minuta. Za jednu minutu prva cijev napuni $\frac{1}{x}$ bazena, a druga $\frac{1}{y}$ bazena. Za dvadeset minuta prva cijev napuni $\frac{20}{x}$ bazena, a druga $\frac{20}{y}$ bazena. Kako je tada bazen pun, slijedi jednakost $\frac{20}{x}+\frac{20}{y}=1$, odnosno $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{20}$.
Analogno, druga i treća cijev pune bazen za 15 minuta pa je $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}$, a prva i treća cijev pune bazen za 12 minuta pa je $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$. Dakle, dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{20}\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{15}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}&=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

Zbrajanjem tih triju jednadžbi slijedi

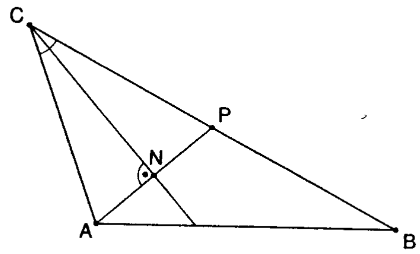
$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\frac{3+4+5}{60}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5},$$

odnosno $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$.

Neka je n vrijeme izraženo u minutama potrebno da se bazen napuni sa sve tri cijevi. Tada je $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{n}$, pa uspoređujući posljednje dvije jednakosti slijedi da je $n=10$. Prema tome, bazen se napuni sa tri cijevi za 10 minuta.

....UKUPNO 10 BODOVA

4. Neka je točka N presjek simetrale kuta $\sphericalangle ACB$ i dužine $\overline{AP}$.



Promotrimo pravokutne trokute ANC i CNP. Oni su sukladni zato jer im je $\overline{CN}$ zajednička stranica, $\sphericalangle ACN = \sphericalangle PCN$, zbog definicije simetrale kuta, i $\sphericalangle CNA = \sphericalangle CNP = 90°$.
Iz dokazane sukladnosti trokuta slijedi da je $|AC| = |CP|$, a kako je točka P polovište dužine $\overline{BC}$, slijedi da je $|BC| = 2|AC|$.
Prema uvjetu zadatka duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja n, $n+1$ i $n+2$. Kako jedan od tih brojeva mora biti dvostruko veći od jednog od preostala dva, jer je $|BC| = 2|AC|$, moguća su tri slučaja:

1. $n+1 = 2n$, tj. $n=1$, $n+1=2$, $n+2=3$, što nije moguće jer je $1+2=3$, pa nije zadovoljena nejednakost trokuta,

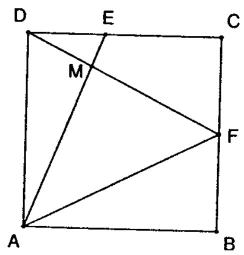
2. $n+2 = 2(n+1)$, tj. $n=0$, što nije moguće,

3. $n+2=2n$, tj. $n=2$, $n+1=3$, $n+2=4$, što je rješenje.

Dakle, duljine stranica trokuta su 2, 3 i 4.

....UKUPNO 10 BODOVA

5.



<u>1. način</u> Neka je a duljina stranice kvadrata. Tada je $P(ABCD) = a^2$, gdje P označava površinu. Za jednakokračan trokut AFD vrijedi $P(AFD) = \frac{1}{2}a\cdot a = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}P(ABCD)$.

Promotrimo sada trokut AED. Zbog uvjeta zadatka slijedi jednakost $|DE| = \frac{2}{5}|CD| = \frac{2}{5}a$, odakle je $P(AED) = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{2}{5}\cdot a = \frac{1}{5}a^2 = \frac{1}{5}P(ABCD)$. Kako je trokut AMD dio trokuta AED, za površine vrijedi $P(AMD) < P(AED)$, tj. $P(AMD) < \frac{1}{5}P(ABCD)$.

Kako je $P(AMD) + P(AFM) = P(AFD) = \frac{1}{2}P(ABCD)$ i budući da je $P(AMD) < \frac{1}{5}P(ABCD)$, dobivamo $P(AFM) = \frac{1}{2}P(ABCD) - P(AMD) > \frac{1}{2}P(ABCD) - \frac{1}{5}P(ABCD) = \frac{3}{10}P(ABCD)$, tj.

$$P(AFM) > \frac{3}{10}P(ABCD). \tag{2}$$

Dalje je $P(FCD) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}P(ABCD)$, a kako je četverokut $MFCE$ dio trokuta FCD slijedi

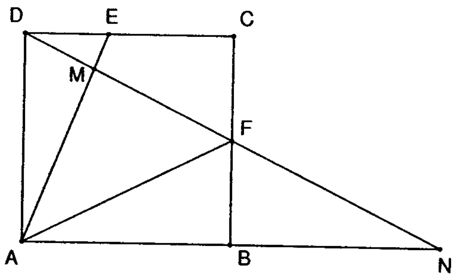
$$P(MFCE) < \frac{1}{4}P(ABCD). \tag{3}$$

Kako je $\frac{1}{4} < \frac{3}{10}$, zbog (2) i (3) vrijedi

$$P(MFCE) < \frac{1}{4}P(ABCD) < \frac{3}{10}P(ABCD) < P(AFM),$$

pa je površina trokuta AFM veća od površine četverokuta $MFCE$.

2. način Zadatak možemo riješiti tako da eksplicitno izračunamo površine traženog trokuta i četverokuta. Zadržimo oznake iz prvog načina rješavanja, te produžimo pravce AB i DF do sjecišta N kao na slici.



Očito su pravokutni trokuti FCD i FBN sukladni jer je $|CF| = |FB|$ i $\measuredangle DFC = \measuredangle BFN$ (vršni kutovi). Iz te sukladnosti slijedi $|BN| = |DC| = a$, pa je $|AN| = |AB| + |BN| = 2a$.
Promotrimo sada trokute ANM i DME. Oni su slični jer je $\measuredangle AMN = \measuredangle DME$ (vršni kutovi) i $\measuredangle MAN = \measuredangle MED$ (kutovi uz presječnicu). Iz te sličnosti imamo omjer $\frac{|AM|}{|ME|} = \frac{|AN|}{|DE|} = \frac{2a}{\frac{2a}{5}} = 5$, tj. $|AM| : |ME| = 5 : 1$.
Promotrimo sada trokute AMD i DME. Oni imaju zajedničku visinu iz vrha D, pa im se površine odnose kao odgovarajuće nasuprotne stranice, tj. $\frac{P(AMD)}{P(DME)} = \frac{|AM|}{|ME|} = 5$ odnosno $P(AMD) = 5P(DME)$. Zbog toga je $P(AMD) = \frac{5}{6}P(AED) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}P(ABCD) = \frac{1}{6}P(ABCD)$.
Zbog toga za površinu trokuta AFM vrijedi

$$P(AFM) = P(AFD) - P(AMD) = \frac{1}{2}P(ABCD) - \frac{1}{6}P(ABCD) = \frac{1}{3}P(ABCD).$$

S druge strane, $P(DME) = \frac{1}{6}P(AED) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5}P(ABCD) = \frac{1}{30}P(ABCD)$, pa za površinu četverokuta $MFCE$ vrijedi

$$P(MFCE) = P(DFC) - P(DME) = \frac{1}{4}P(ABCD) - \frac{1}{30}P(ABCD) = \frac{13}{60}P(ABCD).$$

Kako je $\frac{13}{60}P(ABCD) < \frac{1}{3}P(ABCD)$, slijedi da trokut AFM ima veću površinu od četverokuta $MFCE$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

MINISTARSTVO ZNANOSTI, OBRAZOVANJA I ŠPORTA REPUBLIKE HRVATSKE

ZAVOD ZA ŠKOLSTVO REPUBLIKE HRVATSKE

HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

DRŽAVNO NATJECANJE
MLADIH MATEMATIČARA
REPUBLIKE HRVATSKE

Kraljevica, 27. travnja 2006.

Zadaci za 8. razred

1. Koji je veći od ova dva razlomka:

$$\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1} \quad \text{ili} \quad \frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}?$$

2. Ako je

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}+\frac{1}{1+e}=\frac{5}{2},$$

onda je

$$\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}+\frac{e}{1+e}=\frac{5}{2}.$$

Dokaži!

3. Zbroj kvadrata bilo kojih 2006 uzastopnih prirodnih brojeva nije kvadrat prirodnog broja. Dokaži!

4. Zadan je pravokutan trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C i neka je $\overline{CD}$ visina iz vrha pravog kuta. Ako je s_1 opseg trokuta BCD, s_2 opseg trokuta ADC, te s opseg trokuta ABC, onda je $s^2 = {s_1}^2 + {s_2}^2$. Dokaži!

5. Zadan je konveksan četverokut $ABCD$ i točke $K \in \overline{BD}$, $L \in \overline{BC}$, $M \in \overline{AD}$ takve da je $KL \| DC$ i $MK \| AB$. Ako je $|AB| = 72$ cm i $|DC| = 48$ cm, koliko mnogo međusobno različitih točaka dijagonale $\overline{BD}$ možemo odabrati za točku K tako da duljine dužina $\overline{KL}$ i $\overline{MK}$, izražene u centimetrima, budu prirodni brojevi?

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.

RJEŠENJA ZA 8. RAZRED

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Označimo $10^{2005} = n$. Tada dane razlomke možemo pisati u sljedećem obliku:

$$\frac{n+1}{10n+1} \quad \text{i} \quad \frac{10n+1}{100n+1}.$$

Promotrimo sada razliku ta dva razlomka. Imamo da je

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{10n+1} - \frac{10n+1}{100n+1} &= \frac{(n+1)(100n+1)-(10n+1)^2}{(10n+1)(100n+1)} = \frac{100n^2+n+100n+1-(100n^2+20n+1)}{(10n+1)(100n+1)} \\ &= \frac{81n}{(10n+1)(100n+1)}.\end{aligned}$$

Kako je dobivena razlika pozitivna, slijedi da je prvi razlomak veći od drugog odnosno,

$$\frac{10^{2005}+1}{10^{2006}+1} > \frac{10^{2006}+1}{10^{2007}+1}.$$

....UKUPNO 10 BODOVA

2. Zbroj $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}+\frac{e}{1+e}$ možemo pisati redom

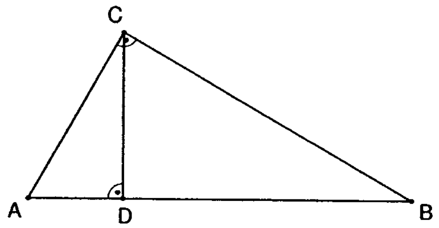
$$\begin{aligned}&\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}+\frac{d}{1+d}+\frac{e}{1+e} = \frac{a+1-1}{1+a}+\frac{b+1-1}{1+b}+\frac{c+1-1}{1+c}+\frac{d+1-1}{1+d}+\frac{e+1-1}{1+e} \\ &= \frac{1+a}{1+a}-\frac{1}{1+a}+\frac{1+b}{1+b}-\frac{1}{1+b}+\frac{1+c}{1+c}-\frac{1}{1+c}+\frac{1+d}{1+d}-\frac{1}{1+d}+\frac{1+e}{1+e}-\frac{1}{1+e} \\ &= 1-\frac{1}{1+a}+1-\frac{1}{1+b}+1-\frac{1}{1+c}+1-\frac{1}{1+d}+1-\frac{1}{1+e} \\ &= 5-\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+d}+\frac{1}{1+e}\right) = 5-\frac{5}{2} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

....UKUPNO 10 BODOVA

3. Između bilo kojih 2006 uzastopnih prirodnih brojeva, uvijek su 1003 parna i 1003 neparna broja.
Kako za bilo koji paran broj vrijedi $(2n)^2 = 2^2n^2 = 4n^2$, kvadrat svakog parnog broja je djeljiv s 4. Slično, za bilo koji neparan broj vrijedi $(2m+1)^2 = 4m^2+4m+1 = 4(m^2+m)+1$, pa kvadrat svakog neparnog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1.
S obzirom da je $1003 = 4 \cdot 250 + 3$, slijedi da zbroj kvadrata bilo kojih 2006 uzastopnih prirodnih brojeva pri dijeljenju s 4 daje ostatak 3. No, kvadrat bilo kojeg prirodnog broja pri dijeljenju s 4 daje ostatak 0 ili 1, pa zbroj kvadrata bilo kojih 2006 uzastopnih prirodnih brojeva nije kvadrat prirodnog broja.

....UKUPNO 10 BODOVA

4.



Prema poučku $K-K$ trokuti BCD i ABC su slični, pa im se opsezi odnose kao odgovarajuće stranice, tj. vrijedi relacija

$$\frac{s_1}{s} = \frac{|BC|}{|AB|}. \tag{1}$$

Analogno, prema poučku $K-K$ trokuti ADC i ABC su slični, pa im se opsezi odnose kao odgovarajuće stranice tj. vrijedi relacija

$$\frac{s_2}{s} = \frac{|AC|}{|AB|}. \tag{2}$$

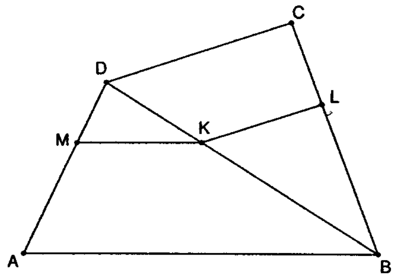
Kvadriranjem i zbrajanjem relacija (1) i (2), te primjenom Pitagorinog poučka na trokut ABC slijedi jednakost

$$\frac{{s_1}^2}{s^2} + \frac{{s_2}^2}{s^2} = \frac{|BC|^2}{|AB|^2} + \frac{|AC|^2}{|AB|^2} = \frac{|BC|^2 + |AC|^2}{|AB|^2} = \frac{|AB|^2}{|AB|^2} = 1,$$

odakle je $s^2 = {s_1}^2 + {s_2}^2$.

.... UKUPNO 10 BODOVA

5. Budući da tražimo cjelobrojne vrijednosti duljina dužina $\overline{KL}$ i $\overline{MK}$, označimo $m = |KL|$ i $n = |MK|$.



Iz $KL \parallel DC$ slijedi $\sphericalangle BLK = \sphericalangle BCD$, a očito je $\sphericalangle KBL = \sphericalangle DBC$, pa prema poučku $K-K$ o sličnosti vrijedi $\triangle DBC \sim \triangle KBL$. Analogno vrijedi $\triangle ABD \sim \triangle MKD$.

Iz pokazanih sličnosti slijede relacije $\frac{|KL|}{|DC|} = \frac{|KB|}{|DB|}$ i $\frac{|MK|}{|AB|} = \frac{|DK|}{|DB|}$, odnosno $\frac{m}{48} = \frac{|KB|}{|DB|}$ i $\frac{n}{72} = \frac{|DK|}{|DB|}$.

Zbrojimo li te dvije relacije dobivamo

$$\frac{n}{72} + \frac{m}{48} = \frac{|DK|}{|DB|} + \frac{|KB|}{|DB|} = \frac{|DK| + |KB|}{|DB|} = \frac{|DB|}{|DB|} = 1.$$

Prema tome, duljine dužina $\overline{KL}$ i $\overline{MK}$, tj. brojevi m i n zadovoljavaju jednadžbu

$$\frac{n}{72} + \frac{m}{48} = 1. \tag{3}$$

Odredimo ponajprije sva cjelobrojna rješenja jednadžbe (3). Iz jednadžbe slijedi $2n + 3m = 144$, odakle je $n = \frac{144 - 3m}{2} = \frac{144 - 4m + m}{2} = 72 - 2m + \frac{m}{2}$. Kako je n cijeli broj, slijedi da je m paran, tj. $m = 2k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Tada je $n = 72 - 2 \cdot 2k + \frac{2k}{2} = 72 - 3k$, $k \in \mathbf{Z}$ i time su dana sva cjelobrojna rješenja jednadžbe (3).

Međutim, za duljine m i n moraju vrijediti nejednakosti $0 < m < |DC|$ i $0 < n < |AB|$, odnosno $0 < 2k < 48$ i $0 < 72 - 3k < 72$. Iz prvog uvjeta slijedi $0 < k < 24$, a iz drugog $0 < 24 - k < 24$. Prvi uvjet je zadovoljen za $k \in \{1, 2, 3, ..., 23\}$, a očito je i drugi uvjet ispunjen za sve cijele k iz tog skupa.

Prema tome, možemo odabrati 23 međusobno različite točke dijagonale $\overline{BD}$ uz tražene uvjete.

.... UKUPNO 10 BODOVA