DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Opatija, 31.ožujka-2.travnja 2011.

5. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x najmanji broj niza. Tada vrijedi:
$x+x+1+x+2+x+3+\ldots+x+30 = 2010 + x + 15$

$$31x + \frac{30\cdot 31}{2} = 2010 + x + 15$$

$31x + 465 = x + 2025$

$31x - x = 2025 - 465$

$30x = 1560$

$x = 52$

To je niz brojeva 52, 53, 54, …, 82.

Najveći broj niza je 82.

2. Neka su x, y i z traženi brojevi, pretpostavimo da je $x < y < z$.

Kako je12 najveći zajednički djelitelj tih brojeva , svi su oni djeljivi s 12, pa se mogu napisati u obliku:

$x = 12a$, $y = 12b$, $z = 12c$, gdje su a, b i c međusobno različiti brojevi i $a < b < c$.

Kako zbroj traženih brojeva iznosi 108, vrijedi $x + y + z = 108$ odnosno $12a + 12b + 12c = 108$.

Primjenom svojstva distributivnosti množenja prema zbrajanju slijedi $12(a + b + c) = 108$.

Nakon dijeljenja s 12 dobivamo $a + b + c = 9$.

Slijede mogućnosti:

I.	$a = 1, b = 2, c = 6$	Traženi brojevi su 12, 24 i 72.
II.	$a = 1, b = 3, c = 5$	Traženi brojevi su 12, 36 i 60.
III.	$a = 2, b = 3, c = 4$	Traženi brojevi su 24, 36 i 48.

3. S obzirom da se za x godina svakome od njih broj godina povećava za x, vrijedi $22 + 3x = 28$.

Slijedi $x = 2$.

Za 2 godine Ante će imati onoliko godina koliko ima Marko danas.

Isto tako, za sljedeće povećanje vrijedi $22 + 3y = 37$, a rješenje je $y = 5$.

Za 5 godina Ante će imati onoliko godina koliko ima Viktor danas.

Viktor je najstariji, pa Marko i najmlađi je Ante.

Ako s a označimo broj Antinih godina danas, Marko koji je dvije godine stariji od Ante ima $a + 2$ godine, a Viktor koji je 5 godina stariji od Ante ima $a + 5$ godina.

Tada vrijedi $a + a + 2 + a + 5 = 22$.

Slijedi $a = 5$.

Ante ima danas 5 godina, Marko 7, a Viktor 10 godina.

4. Neka je x prvi količnik, a y drugi količnik.

Tada vrijedi $1600 = n \cdot x + 1$ odnosno $1450 = n \cdot y + 7$.

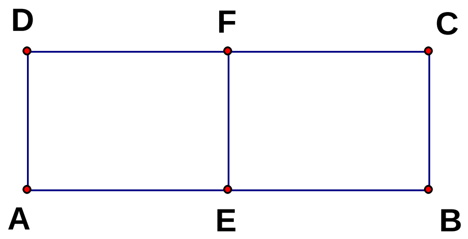
Dalje je $n \cdot x = 1599$ odnosno $n \cdot y = 1443$.

Zato je n zajednički djelitelj brojeva 1599 i 1443.

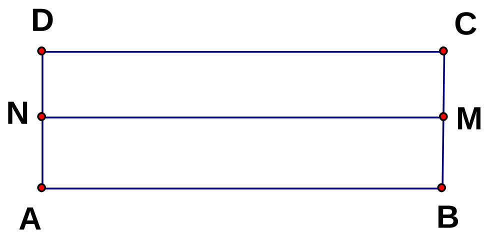
Zajednički djelitelji brojeva 1599 i 1443 su 1, 3, 13 i 39, a kako je $n > 7$, $n \in \{13, 39\}$.

Za $n = 13$, vrijedi $x = 123$, $y = 111$, a za $n = 39$, vrijedi $x = 41$, $y = 37$.

5. Marko



Karlo



Neka je $|AB| = a, |BC| = b$.

Ako zbrojimo opsege pravokutnika *AEFD* i *EFCB*, dobit ćemo zbroj za $2|EF| = 2b$ veći od opsega

pravokutnika *ABCD*.

Ako zbrojimo opsege pravokutnika *ABMN* i *NMCD*, dobit ćemo zbroj za $2|NM| = 2a$ veći od

opsega pravokutnika *ABCD*.

Dakle, zbrajanjem opsega sva 4 manja pravokutnika dobit ćemo zbroj koji odgovara trostrukom

opsegu O početnog pravokutnika *ABCD*.

Dakle, vrijedi $3 \cdot O = 60 + 60 + 75 + 75 = 270$ odnosno $O = 90\,cm$.

Opseg početnog lista papira je 90*cm*.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Opatija, 31.ožujka-2.travnja 2011.

6. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Voćar je taj dan prodao $\frac{5}{6} \cdot 258 - 15 = 200\,kg$ jabuka.

   Prijepodne je prodao $\frac{3}{8} \cdot 200 + 5 = 80\,kg$ i za to dobio $80 \cdot 3.50 = 280\,kn$.

   Poslijepodne je prodao $200 - 80 = 120\,kg$ i za to dobio $280 \cdot 1\frac{5}{7} = 480\,kn$.

   To znači da je poslijepodne prodavao jabuke po $480 : 120 = 4\,kn$.

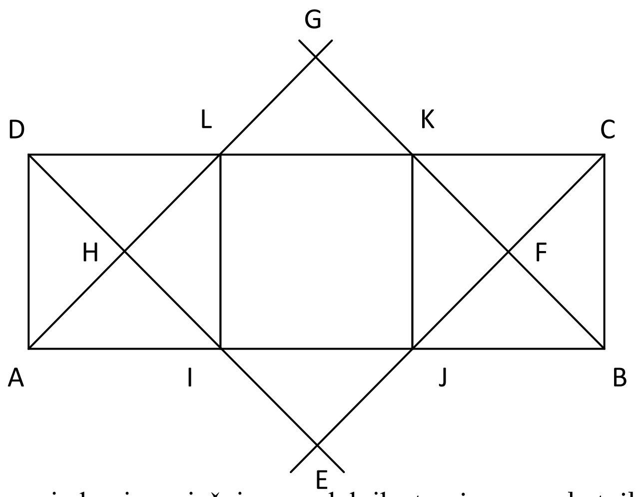
2. Umnožak mora biti djeljiv s 5 i s 3.

   Budući u umnošku bar jedan od brojeva mora biti djeljiv s 5 da bi umnožak bio djeljiv s 5, to je $\overline{31a}$ djeljiv s 5 jer broj $\overline{62b1}$ nije djeljiv s 5. To znači da znamenka a množe biti 0 ili 5.

   Ako je znamenka a = 5, tada je broj 315 djeljiv i s 5 i s 3 pa je i s 15. U tom slučaju znamenka b može biti bilo koja znamenka od 0 do 9.

   Ako je znamenka a = 0, tada je broj 310 djeljiv s 5, ali ne i s 3 pa broj $\overline{62b1}$ mora biti djeljiv s 3 da bi umnožak bio djeljiv s 15. U tom slučaju znamenka b može biti 0, 3, 6 i 9.

3.



Simetrale unutarnjih kutova su ujedno i presječnice paralelnih stranica pravokutnika pa s njima zatvaraju kutove od 45°.

Neka su to presječne točke I, J K i L.

Vrijedi $|\sphericalangle \mathrm{AID}| = |\sphericalangle \mathrm{ALD}| = |\sphericalangle \mathrm{BJC}| = |\sphericalangle \mathrm{BKC}| = 45°$.

Kako je $|\sphericalangle \mathrm{DAL}| = |\sphericalangle \mathrm{ALD}| = 45°$, trokut *ALD* je jednakokračan pravokutan trokut pa je

$|AD| = |DL|$ =3*cm.*

Isto tako je i $|BC| = |CK|$ =3*cm*, a $|KL| = |CD| - |CK| - |LD| = 9 - 3 - 3 = 3\,cm.$

Znači da je $|DL| = |LK| = |KC|$. Na isti način pokazujemo da je $|AI| = |IJ| = |JB|$.

Zadani pravokutnik možemo podijeliti na tri sukladna kvadrata.

Trokuti *HLD* i *GLK* su sukladni jer je

$|DL| = |LK|, |\sphericalangle HLD| = |\sphericalangle KLG|, |\sphericalangle HDL| = |\sphericalangle FKC| = |\sphericalangle LKG|$.

Isto tako sukladni su i trokuti *AIH* i *JIE*.

U kvadratu *AILD* sukladni su trokuti *AIH,ILH,LDH* i *DAH* (KSK poučak) i svaki čini četvrtinu kvadrata. Zbog toga se od trokuta *IEJ, JFK, KGL* i *LHI* može sastaviti kvadrat sa stranicom duljine 3*cm*, pa je površina četverokuta *EFGH* jednaka površini dva kvadrata sa stranicama duljine 3*cm* i iznosi P=2·3·3 odnosno P=18 cm^2.

Površina četverokuta *EFGH* iznosi 18 cm^2.

4. Kako je $\left|\sphericalangle BAC\right| = 20° + 10° + 10° = 40°$ i $\left|\sphericalangle CBA\right| = 10° + 30° = 40°$, onda je trokut ΔABC jednakokračan pa je $\left|AC\right| = \left|BC\right|$.

S obzirom da je $\left|\sphericalangle BAD\right| = 20° + 10° = 30°$ i $\left|\sphericalangle DBA\right| = 30°$, onda je trokut ΔABD jednakokračan pa je $\left|AD\right| = \left|BD\right|$.

Budući da je i $\left|\sphericalangle DAC\right| = 10° = \left|\sphericalangle CBD\right|$, prema tm S-K-S o sukladnosti slijedi $\Delta ADC \cong \Delta BDC$.

Iz sukladnosti vrijedi $\left|\sphericalangle CDA\right| = \left|\sphericalangle BDC\right|$ i $\left|\sphericalangle ACD\right| = \left|\sphericalangle DCB\right|$.

Kako je $\left|\sphericalangle ACB\right| = 180° - 40° - 40° = 100°$, onda je $\left|\sphericalangle ACD\right| = \left|\sphericalangle DCB\right|$=50°.

S obzirom da je $\left|\sphericalangle ADB\right| = 180° - 30° - 30° = 120°$, onda je

$$\left|\sphericalangle CDA\right| = \left|\sphericalangle BDC\right| = \frac{360° - 120°}{2} = 120°.$$

Budući da je $\left|\sphericalangle CDA\right| = \left|\sphericalangle BDC\right|, \left|\sphericalangle DAC\right| = 10° = \left|\sphericalangle EAD\right|$ i $\overline{AD}$ zajednička stranica, prema tm K-S-K o sukladnosti slijedi $\Delta ADC \cong \Delta ADE$ te je $\left|CD\right| = \left|DE\right|$.

To znači da je trokut ΔCDE jednakokračan pa je $\left|\sphericalangle DCE\right| = \left|\sphericalangle CED\right| = \dfrac{180° - \left|\sphericalangle EDC\right|}{2} = 30°$.

Na kraju $\left|\sphericalangle ECB\right| = \left|\sphericalangle DCB\right| - \left|\sphericalangle DCE\right| = 50° - 30° = 20°$.

5.

	BI	VR	PR	PO	ŠI	pli	jed	hod	ron	bic
David	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+
Matija	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-
Juraj	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-
Miha	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-
Petar	-	-	-	-	+	-	+	-	-	-
pli	+	-	-	-	-					
jed	-	-	-	-	+					
hod	-	+	-	-	-					
ron	-	-	-	+	-					
bic	-	-	+	-	-					

David vozi bicikl u Primoštenu, Matija roni u Poreču, Juraj brzo hoda u Vrsaru, Miha pliva u Biogradu, a Petar jedri u Šibeniku.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Opatija, 31.ožujka-2.travnja 2011.

7. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je to četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$.

Vrijedi $\overline{abcd} : \overline{cd} = 81 \Rightarrow \overline{abcd} = 81\overline{cd}$

$$1000a + 100b + 10c + d = 81(10c + d)$$
$$1000a + 100b = 81(10c + d) - 10c - d$$
$$1000a + 100b = 80(10c + d) \,/ \cdot \frac{1}{20}$$
$$50a + 5b = 4(10c + d)$$
$$5(10a + b) = 4(10c + d)$$

$5\overline{ab} = 4\overline{cd}$.

Slično

$$\overline{dcba} : \overline{ba} = 225 \Rightarrow \overline{dcba} = 225\overline{ba}$$
$$1000d + 100c + 10b + a = 225(10b + a)$$
$$1000d + 100c = 225(10b + a) - 10b - a$$
$$1000d + 100c = 224(10b + a) \,/ \cdot \frac{1}{4}$$
$$250d + 25a = 56(10b + a)$$
$$25(10d + c) = 56(10b + a)$$

$25\overline{dc} = 56\overline{ba}$.

Kako je $25\overline{dc}$ djeljivo s 5, onda je i $56\overline{ba}$ djeljivo s 5 odnosno $\overline{ba}$ je djeljiv s 5 što znači da je $a \in \{0,5\}$. No, a je znamenka tisućica traženog broja pa ne može biti 0. Dakle, $a = 5$.

Budući da je $25\overline{dc}$ djeljivo s 25, onda je i $56\overline{ba}$ djeljivo s 25 odnosno $\overline{ba}$ je djeljiv s 25 što znači da je $b \in \{2,7\}$.

Iz $5\overline{ab} = 4\overline{cd}$ slijedi da je $5\overline{ab}$ djeljivo s 4 odnosno $\overline{ab}$ je djeljiv s 4 pa je $b = 2$.

Dalje je $4\overline{cd} = 5\overline{ab} = 5 \cdot 52 = 260$ pa je $\overline{cd} = 260 : 4 = 65$. Analogno, iz $25\overline{dc} = 56\overline{ba}$ slijedi $\overline{cd} = 65$. Traženi broj je 5265.

2. Neka je cijena kamere x *kn*, a oni su dali redom a, b, c i d *kn*.

Prvi je dao 50% ukupnog iznosa, tj. $a = \frac{1}{2}x$.

Drugi je dao trećinu iznosa kojeg su dala preostala trojica, tj.

$$(a+c+d)+\frac{1}{3}(a+c+d)=x$$
$$\frac{4}{3}(a+c+d)=x$$
$$a+c+d=\frac{3}{4}x$$

To znači da je drugi dao četvrtinu ili 25% od ukupnog iznosa kamere.

Treći je dao 25% ili četvrtinu iznosa preostale trojice, tj.

$$(a+b+d)+\frac{1}{4}(a+b+d)=x$$
$$\frac{5}{4}(a+b+d)=x$$
$$a+b+d=\frac{4}{5}x$$

To znači da je treći dao petinu ili 20% ukupnog iznosa kamere.

Četvrti je dao 500 *kn* što predstavlja 100% −50%− 25% − 20% = 5% ukupnog iznosa kamere.

Prema tome je

$$5\% \cdot x = 500$$
$$x = \frac{500}{0.05}$$
$$x = 10000.$$

Cijena kamere je 10 000 *kn*.

3. Neka je n traženi broj.

Tada je $n = 17x + 5$ odnosno $n = 24y + 3$, $x, y \in \mathbb{Z}$.

Dakle,

$$17x + 5 = 24y + 3$$
$$17x = 24y - 2$$
$$x = \frac{24y - 2}{17} = \frac{17y + 7y - 2}{17} = y + \frac{7y - 2}{17}$$

$$x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{7y - 2}{17} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 7y - 2 = 17a, a \in \mathbb{Z}$$

$$7y = 17a + 2$$
$$y = \frac{17a + 2}{7} = 2a + \frac{3a + 2}{7}$$

$$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3a + 2}{7} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3a + 2 = 7b, b \in \mathbb{Z}$$

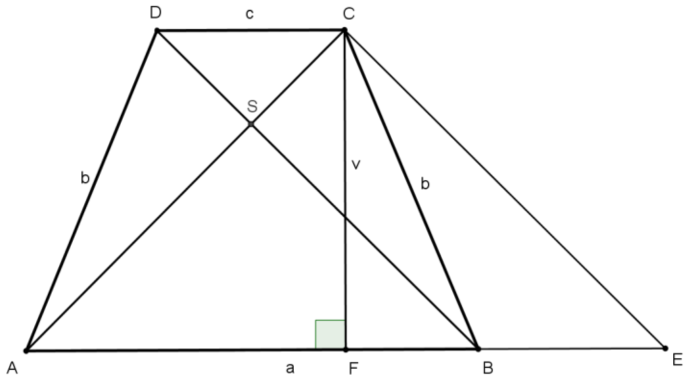
$$3a = 7b - 2$$
$$a = \frac{7b - 2}{3} = 2b + \frac{b - 2}{3}$$

$$a \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{b - 2}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow b - 2 = 3c, c \in \mathbb{Z}$$

$$b = 3c + 2$$
$$a = 7c + 4$$
$$y = 17c + 10$$
$$x = 24c + 14$$
$$n = 408c + 243$$

Kako je $10000 = 408 \cdot 24 + 208$, onda je $c = 24$ pa je $n = 10035$.

4. Neka je zadani jednakokračni trapez $ABCD$ i neka je na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha B odabrana točka E tako da je $|BE| = |DC|$ te neka su oznake kao na slici.



Kako je $|BE| = |DC|$ i $BE \parallel DC$, onda je $\square BECD$ paralelogram pa je $|EC| = |BD|$.

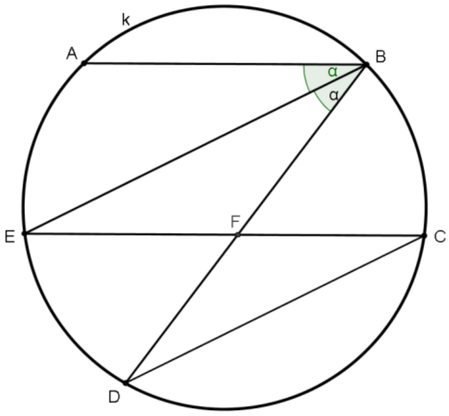
S obzirom da je $\square ABCD$ jednakokračan trapez, onda je $|AC| = |BD|$. To znači da je $|AC| = |EC|$ odnosno da je ΔAEC jednakokračan.

Budući da je $\overline{CF}$ visina na osnovicu jednakokračnog trokuta ΔAEC, vrijedi $|AF| = |FE| = \frac{a+c}{2}$.

Za površinu P trapeza $\square ABCD$ vrijedi $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$ odnosno $100 = \frac{a+c}{2} \cdot 10$ pa je $\frac{a+c}{2} = 10$.

Dakle, ΔAFC je jednakokračan pravokutan pa je $|\sphericalangle FAC| = 45°$, a to znači da je $|\sphericalangle ASB| = 90°$.

5. Nacrtamo i tetivu $\overline{DC}$ te neka su oznake kao na slici.



Kako je $\overline{AB} \parallel \overline{EC}$, onda je $|\sphericalangle CEB| = |\sphericalangle ABE| = \alpha$. To znači da je ΔEFB jednakokračan pa je $|EF| = |BF|$.

S obzirom da su kutovi $\sphericalangle CDB, \sphericalangle CEB$ obodni kutovi nad istim kružnim lukom, vrijedi $|\sphericalangle CDB| = \alpha$.

Analogno su kutovi $\sphericalangle ECD, \sphericalangle EBD$ obodni kutovi nad istim kružnim lukom te je $|\sphericalangle ECD| = \alpha$.

Dakle, i trokut ΔDCF je jednakokračan pa je $|FD| = |FC|$.

Na kraju, $|EC| = |EF| + |FC| = |BF| + |FD| = |BD|$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Opatija, 31.ožujka-2.travnja 2011.

8. razred-rješenja

OVDJE JE DAN JEDAN NAČIN RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Da bismo riješili zadanu jednadžbu potrebno je izvršiti djelomičnu racionalizaciju razlomaka na lijevoj strani jednadžbe.

Tako ćemo prvi razlomak proširiti s $\sqrt{2}-1$, drugi s $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ itd.

Nakon izvršene racionalizacije zadana jednadžba poprima oblik :

$$x+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 4}}+...+\frac{\sqrt{50}-\sqrt{49}}{\sqrt{49\cdot 50}}=1-\frac{1}{\sqrt{50}}.$$

Dobivenu jednadžbu možemo transformirati tako da poprimi slijedeći oblik :

$$x+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}+...+\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{50}}-\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{50}}=1-\frac{1}{\sqrt{50}}.$$

Skraćivanjem razlomaka imamo da je :

$$x+1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{49}}-\frac{1}{\sqrt{50}}=1-\frac{1}{\sqrt{50}}.$$

Zbrajanjem izraza na lijevoj strani konačno dobivamo rješenje jednadžbe

$x+1-\frac{1}{\sqrt{50}}=1-\frac{1}{\sqrt{50}}$, odnosno x = 0.

2. Neka je $\frac{73k}{95k}, k\in\mathbb{N}$ traženi razlomak.

Tada vrijedi $73k+95k=n^2, n\in\mathbb{N}$ odnosno $168k=n^2$.

Dalje je $2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7\cdot k=n^2$ pa je $k=2\cdot 3\cdot 7$ odnosno $k=42$.

Traženi razlomak je $\frac{73k}{95k}=\frac{73\cdot 42}{95\cdot 42}=\frac{3066}{3990}$.

3. Neka je x udaljenost mjesta A i B. Neka su v_1 odnosno v_2 brzine putnika koji kreće iz A odnosno iz B. Neka je t_1 vrijeme proteklo do prvog susreta. Tada vrijedi

$v_1 \cdot t_1 = 8, v_2 \cdot t_1 = x - 8$ odnosno $t_1 = \frac{8}{v_1}, t_1 = \frac{x-8}{v_2}$ pa je $\frac{8}{v_1} = \frac{x-8}{v_2}$ odnosno $\frac{v_2}{v_1} = \frac{x-8}{8}$.

Neka je t_2 vrijeme proteklo do drugog susreta. Tada vrijedi

$v_1 \cdot t_2 = x - 2, v_2 \cdot t_2 = x + 2$ odnosno $t_2 = \frac{x-2}{v_1}, t_2 = \frac{x+2}{v_2}$ pa je $\frac{x-2}{v_1} = \frac{x+2}{v_2}$ odnosno

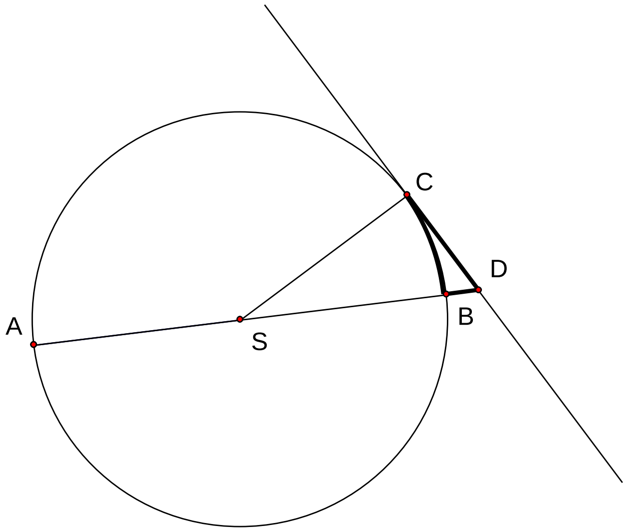
$\frac{v_2}{v_1} = \frac{x+2}{x-2}$.

Slijedi $\frac{x-8}{8} = \frac{x+2}{x-2}$

$$\begin{aligned} &x^2 - 8x - 2x + 16 = 8x + 16 \\ &x^2 - 18x = 0 \\ &x(x-18) = 0 \\ &x_1 = 0, x_2 = 18 \end{aligned}$$

Prvo rješenje je očito nemoguće pa je udaljenost mjesta A i B 18 *km*.

4.



Neka je $\left|SD\right| = \mathrm{d}$.

Trokut ΔSDC je pravokutni trokut sa šiljastim kutovima veličina 30˚ i 60˚, tj. polovina jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine d.

Dužina $\overline{SC}$ je visina tog jednakostraničnog trokuta, pa vrijedi $\frac{\mathrm{d}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{r}$, odakle slijedi $\mathrm{d} = \frac{2\mathrm{r}\sqrt{3}}{3}$.

Hipotenuza pravokutnog trokuta ΔSCD ima duljinu $\frac{2\mathrm{r}\sqrt{3}}{3}$, a kateta $\overline{DC}$ je upola kraća odnosno ima duljinu $\frac{\mathrm{r}\sqrt{3}}{3}$.

Površina trokuta ΔSDC iznosi $P_{\Delta} = \frac{\mathrm{r}\cdot\frac{r\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{\mathrm{r}^2\sqrt{3}}{6}$.

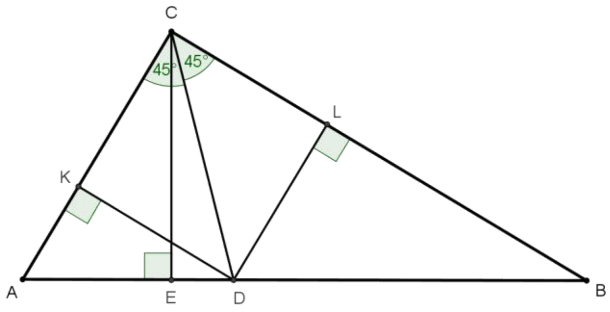
Površina kružnog isječka sa središnjim kutom od 30˚ iznosi $P_i = \frac{\mathrm{r}^2\cdot\pi\cdot 30°}{360°} = \frac{\mathrm{r}^2\cdot\pi}{12}$.

Površina zadanog lika je $P = \frac{\mathrm{r}^2\sqrt{3}}{6} - \frac{\mathrm{r}^2\cdot\pi}{12} = \frac{\mathrm{r}^2}{12}(2\sqrt{3} - \pi)$.

Kružni luk BC ima duljinu $l = \frac{\mathrm{r}\cdot\pi\cdot 30°}{180°} = \frac{\mathrm{r}\cdot\pi}{6}$,

a opseg zadanog lika je $\mathrm{O} = \frac{\mathrm{r}\pi}{6} + \frac{\mathrm{r}\sqrt{3}}{3} + \frac{2\mathrm{r}\sqrt{3}}{3} - \mathrm{r} = \frac{\mathrm{r}\pi}{6} + \mathrm{r}\sqrt{3} - \mathrm{r} = \mathrm{r}\left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1\right)$.

5.



Visina $\overline{CE}$ dijeli trokut ΔABC na dva međusobno slična trokuta koji su i slični zadanom trokutu

(jednaki kutovi –tm K-K o sličnosti).

Vrijedi $\Delta ABC \sim \Delta ACE$ pa je

$\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{|EC|}{|BC|}$ odnosno $|AE| = \frac{|EC|}{|BC|} \cdot |AC|$.

Isto tako vrijedi $\Delta ABC \sim \Delta CBE$ pa je

$\frac{|EC|}{|AC|} = \frac{|EB|}{|BC|}$ odnosno $|EB| = \frac{|EC|}{|AC|} \cdot |BC|$.

Za površine ΔADC i ΔBCD vrijedi $P_{\Delta ADC} = \frac{|AD| \cdot |EC|}{2} = \frac{|AC| \cdot |DK|}{2}$ i

$P_{\Delta BCD} = \frac{|DB| \cdot |EC|}{2} = \frac{|BC| \cdot |DL|}{2}$ pa je $\frac{|AC| \cdot |DK|}{|BC| \cdot |DL|} = \frac{|AD| \cdot |EC|}{|DB| \cdot |EC|} = \frac{|AD|}{|DB|} = \frac{m}{n}$.

Kako je točka D na simetrali kuta $\sphericalangle ACB$, onda je $|DK| = |DL|$.

Dakle, $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{m}{n}$.

Na kraju, $|AE| : |EB| = \frac{|AE|}{|EB|} = \frac{\frac{|EC|}{|BC|} \cdot |AC|}{\frac{|EC|}{|AC|} \cdot |BC|} = \frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{m^2}{n^2} = m^2 : n^2$.