

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

1. Brisanjem prve dvije znamenke nekog prirodnog broja n dobije se 73 puta manji broj. Odredi dva najmanja takva broja n .

2. Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{28} \\ xy - 2z^2 = 7. \end{cases}$$

3. Paralelno stranicama jednakostraničnog trokuta povučeni su pravci koji dijele taj trokut na tri sukladna romba, tri sukladna trapeza i jedan jednakostranični trokut u sredini. Ako je površina tog dobivenog trokuta dvostruko veća od površine pojedinog romba, koliki je udio površine jednog trapeza u površini polaznog trokuta?

4. Dokaži da jednačba

$$x^2 = 2y^2 - 75y + 5$$

nema cjelobrojnih rješenja.

5. Pravokutnik dimenzija 5×6 podijeljen je na osam pravokutnika čije su stranice paralelne sa stranicama polaznog pravokutnika, a duljine stranica su im prirodni brojevi. Dokaži da su barem dva od tih osam pravokutnika međusobno sukladna.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

1. Odredi sve realne brojeve a takve da postoji kompleksni broj z za koji vrijedi

$$|z| = 1 \quad \text{i} \quad |az - 1| = a|z + 1|.$$

2. Dokaži da jednačina

$$3x^4 + 2013 = 25y^2 - 24x^2$$

nema cjelobrojnih rješenja.

3. U skupu realnih brojeva riješi jednačinu

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = 24.$$

4. Dužina \overline{AB} je dulja stranica pravokutnika $ABCD$. Okomica iz vrha B na dijagonalu \overline{AC} siječe pravac AD u točki E , a kružnica sa središtem A koja prolazi kroz točku B siječe \overline{CD} u točki F . Dokaži da su pravci AF i EF međusobno okomiti.

5. Ivica je od n^3 jediničnih kockica sastavio veliku kocku brida duljine n i zatim je neke od šest strana velike kocke obojao, a neke nije. Kada je rastavio veliku kocku, otkrio je da točno 1000 jediničnih kockica nema niti jednu obojanu stranu. Pokaži da je to zaista moguće i odredi broj strana velike kocke koje je Ivica obojao.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

1. Dane su tri nekolinearne točke A , B i M , takve da je M između A i B , te kružnica k čiji je promjer \overline{AB} . Neka je N bilo koja točka na kružnici k , različita od A i B . Dokaži da je vrijednost izraza

$$\frac{\operatorname{tg}(\sphericalangle ANM)}{\operatorname{tg}(\sphericalangle MAN)}$$

konstantna, tj. da ne ovisi o odabiru točke N .

2. Neka je n složen prirodni broj i neka su d_1, d_2, \dots, d_m svi njegovi djelitelji. Dokaži da vrijedi jednakost

$$\frac{2}{\log n^m} \sum_{k=1}^m \log d_k = 1.$$

3. Dana je kocka $ABCD A' B' C' D'$ brida duljine 1. Na njenim bridovima \overline{AB} , \overline{AD} , $\overline{C' D'}$ i $\overline{B' C'}$ odabrane su redom točke P , Q , R i S tako da je $PQRS$ kvadrat sa središtem u središtu dane kocke. Kolika je duljina stranice tog kvadrata?

4. Dokaži da je broj $\cos \frac{\pi}{2 \cdot 3^n}$ iracionalan za svaki prirodni broj n .

(Realni broj je iracionalan ako ga nije moguće prikazati kao omjer dvaju cijelih brojeva.)

5. Polja jedinične kvadratne mreže velikih dimenzija obojana su naizmjenično crno i bijelo, poput šahovske ploče. Iz te mreže izrezan je poligon čije stranice leže na linijama kvadratne mreže.

Neka se taj poligon sastoji od B bijelih i C crnih polja, a njegov rub od b bijelih i c crnih jediničnih dužina. Dokaži da vrijedi $c - b = 4(C - B)$.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

15. veljače 2013.

1. Odredi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi

$$\lfloor \sqrt[4]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[4]{2} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor = \frac{3}{2}n + 1.$$

($\lfloor x \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji nije veći od x .)

2. Točno tri unutrašnja kuta konveksnog mnogokuta su tupa. Koliko najviše stranica može imati taj mnogokut?

3. Dokaži da je broj čiji se dekadski zapis sastoji od 2187 znamenki 1 djeljiv s 2187.

4. Četverokut s vrhovima 0 , z , $\frac{1}{z}$ i $z + \frac{1}{z}$ u kompleksnoj ravnini ima površinu $\frac{35}{37}$. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza $\left| z + \frac{1}{z} \right|^2$.

5. U nekoj zemlji nalaze se tri grada A , B i C . Između svaka dva grada postoji nekoliko cesta (najmanje jedna) i sve ceste su dvosmjerne. Osim direktnih cestovnih veza između dvaju gradova postoje i indirektne. Indirektna cestovna veza između gradova X i Y sastoji se od ceste koja povezuje grad X s trećim gradom Z i ceste koja povezuje gradove Z i Y .

Poznato je da postoje ukupno 43 cestovne veze između gradova A i B , te ukupno 29 cestovnih veza između gradova B i C . Koliko ukupno može biti cestovnih veza između gradova A i C ?