

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak B-1.1.

Za pozitivne realne brojeve a i b definira se $a \star b = \frac{a-b}{a+b}$. Koliko je

$$\frac{(a \star b) + 1}{(b \star a) - 1} + \frac{(a \star b) + 2}{(b \star a) - 2} + \dots + \frac{(a \star b) + k}{(b \star a) - k} + \dots + \frac{(a \star b) + 2020}{(b \star a) - 2020} \quad ?$$

Rješenje.

$$\frac{(a \star b) + 1}{(b \star a) - 1} = \frac{\frac{a-b}{a+b} + 1}{\frac{b-a}{b+a} - 1} = \frac{a-b + (a+b)}{b-a - (b+a)} = \frac{2a}{-2a} = -1 \quad 2 \text{ boda}$$

$$\frac{(a \star b) + 2}{(b \star a) - 2} = \frac{\frac{a-b}{a+b} + 2}{\frac{b-a}{b+a} - 2} = \frac{a-b + 2(a+b)}{b-a - 2(b+a)} = \frac{3a+b}{-b-3a} = -1 \quad 1 \text{ bod}$$

...

$$\frac{(a \star b) + k}{(b \star a) - k} = \frac{\frac{a-b}{a+b} + k}{\frac{b-a}{b+a} - k} = \frac{a-b + k(a+b)}{b-a - k(b+a)} = \frac{(k+1)a + (k-1)b}{(1-k)b - (1+k)a} = -1 \quad 2 \text{ boda}$$

Svi pribrojnici imaju vrijednost -1 iz čega slijedi da je rješenje -2020 . 1 bod

Napomena: Ako je učenik dobio točan rezultat bez provjere općeg slučaja, dodijeliti 4 boda.

Zadatak B-1.2.

Riješite nejednadžbu $\left(1 - \frac{4x^3 - x}{x - 2x^2}\right)^{-3} > 0$.

Prvo rješenje.

Uočimo da se brojnik i nazivnik razlomka u zagradi mogu faktorizirati i skratiti, pa dobivamo

$$\left(1 + \frac{x(2x - 1)(2x + 1)}{x(2x - 1)}\right)^{-3} > 0, \quad 2 \text{ boda}$$

a odatle uz uvjet $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ 1 bod

$(2x + 2)^{-3} > 0$ odnosno $\frac{1}{(2x + 2)^3} > 0$. 1 bod

Slijedi $2x + 2 > 0$, odnosno $x > -1$, pa je 1 bod

$$x \in \langle -1, +\infty \rangle \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}. \quad 1 \text{ bod}$$

Drugo rješenje.

Prikažimo izraz u zagradi kao razlomak. Dana nejednadžba je redom ekvivalentna s

$$\begin{aligned} \left(\frac{x - 2x^2 - 4x^3 + x}{x - 2x^2}\right)^{-3} &> 0 \\ \left(\frac{2x - 2x^2 - 4x^3}{x - 2x^2}\right)^{-3} &> 0 \\ \left(\frac{2x(1 + x)(1 - 2x)}{x(1 - 2x)}\right)^{-3} &> 0 \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Ovaj izraz nakon skraćivanja, uz uvjet $x \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$ 1 bod

prelazi u $(2x + 2)^{-3} > 0$ odnosno $\frac{1}{(2x + 2)^3} > 0$. 1 bod

Slijedi $2x + 2 > 0$, odnosno $x > -1$, pa je 1 bod

$$x \in \langle -1, +\infty \rangle \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}. \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: Ako učenik nije napisao uvjet, ali je isključio brojeve 0 i 0.5 dobiva sve bodove, a ako nije napisao uvjet i nije isključio brojeve 0 i 0.5 oduzeti 2 boda. Ako je napisao uvjet, ali nije isključio brojeve 0 i 0.5 oduzeti 1 bod.

Zadatak B-1.3.

Neka su a, b, c i d realni brojevi različiti od nule takvi da je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$ i $a + b + c + d + abcd = 0$. Izračunajte $\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$.

Prvo rješenje.

Traženi izraz jednak je

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \frac{cd - ab}{abcd} \cdot \frac{d + c}{cd} = \frac{cd^2 + c^2d - abd - abc}{abc^2d^2}. \quad 1 \text{ bod}$$

Iz $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$ dobivamo $bcd + acd + abd + abc = 0$,

odakle slijedi $bcd + acd = -abd - abc$. 1 bod

Stoga je

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) &= \frac{cd^2 + c^2d - abd - abc}{abc^2d^2} \\ &= \frac{cd^2 + c^2d + bcd + acd}{abc^2d^2} = \frac{cd(d + c + b + a)}{abc^2d^2} \\ &= \frac{d + c + b + a}{abcd}. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Kako iz $a + b + c + d + abcd = 0$ slijedi $a + b + c + d = -abcd$, 1 bod

dobivamo

$$\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) = \frac{d + c + b + a}{abcd} = \frac{-abcd}{abcd} = -1. \quad 1 \text{ bod}$$

Drugo rješenje.

Dijeljenjem jednakosti $a + b + c + d + abcd = 0$ s $abcd$ dobivamo

$$\frac{1}{bcd} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd} + \frac{1}{abc} + 1 = 0, \quad 1 \text{ bod}$$

a odatle

$$\frac{1}{cd}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right) = -1. \quad 2 \text{ boda}$$

Kako je $\frac{1}{b} + \frac{1}{a} = -\frac{1}{d} - \frac{1}{c}$

1 bod

imamo

$$\frac{1}{cd}\left(-\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{ab}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{c}\right) = -1. \quad 1 \text{ bod}$$

Konačno, izlučivanjem dobivamo $\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{ab} - \frac{1}{cd}\right) = -1$.

1 bod

Zadatak B-1.4.

Gađajući u metu Karlo je nekoliko puta pogodio devetku, nekoliko puta osmicu. Sedmicu je pogodio dvostruko manje puta nego devetku, a broj pogodaka u peticu je za tri manji nego u osmicu. Ukupno je sakupio 200 bodova.

Koliko je puta Karlo gađao u metu ako nijednom nije promašio niti je pogodio neki drugi broj? (Pogodak u devetku donosi 9 bodova, u osmicu 8 bodova, ...)

Rješenje.

Ako je Karlo devetku pogodio x puta, onda je sedmicu pogodio $\frac{x}{2}$ puta.

Ako je osmicu pogodio y puta, onda je peticu pogodio $y - 3$ puta.

Tako je sakupio ukupno $9x + 8y + 7 \cdot \frac{x}{2} + 5(y - 3) = 200$ bodova. 2 boda

Tražimo prirodna rješenja (diofantske) jednadžbe $\frac{25}{2}x + 13y = 215$.

Iz $25x + 26y = 430$ slijedi $26y = 430 - 25x$.

Pošto je desna strana jednakosti djeljiva s 5, i lijeva strana jednakosti mora biti djeljiva s 5. Broj 26 nije djeljiv s 5, pa mora biti y djeljiv s 5. 1 bod

Kako je $25x = 430 - 26y > 0$ slijedi $y < 17$, pa je dovoljno provjeriti za $y = 5$, $y = 10$ i $y = 15$. 1 bod

Za $y = 5$ imamo $25x = 430 - 26 \cdot 5 = 300$ pa je $x = 12$.

Za $y = 10$ imamo $25x = 430 - 26 \cdot 10 = 170$ pa $x \notin \mathbb{N}$.

Za $y = 15$ imamo $25x = 430 - 26 \cdot 15 = 40$ pa $x \notin \mathbb{N}$.

Dakle, jedino je rješenje $x = 12$, $y = 5$. 1 bod

Karlo je devetku pogodio 12 puta, osmicu 5 puta, sedmicu 6 puta i peticu 2 puta. Ukupno je gađao $12 + 5 + 6 + 2 = 25$ puta. 1 bod

Napomena: Za pogođeno rješenje, uz njegovu provjeru, a bez dokaza da je to jedino rješenje, učenik dobiva 2 boda.

Zadatak B-1.5.

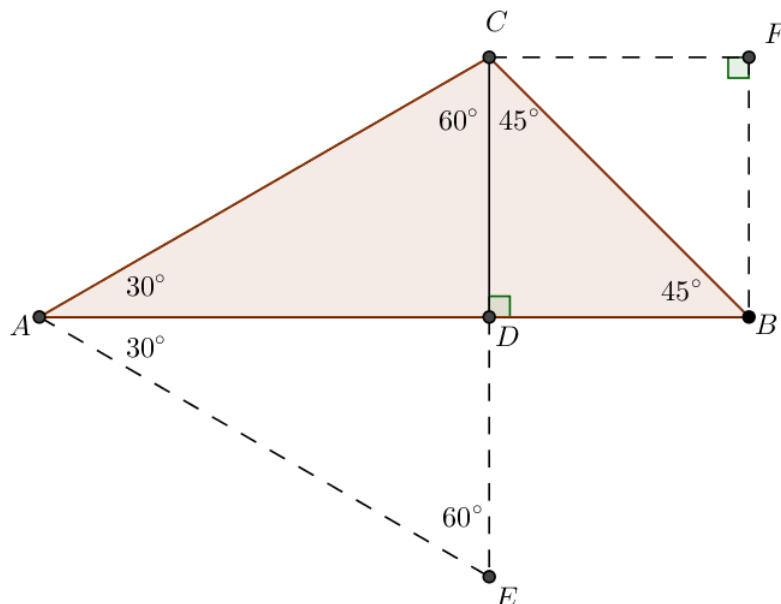
Unutarnji se kutovi trokuta odnose kao $2 : 3 : 7$. Odredite duljinu najdulje stranice trokuta, ako najkraća stranica ima duljinu 1 cm.

Rješenje.

Iz $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 7$ i $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ dobivamo $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ i $\gamma = 105^\circ$.

1 bod

Stoga imamo sljedeću skicu.



Kako je α najmanji, a γ najveći kut, zaključujemo da je najkraća stranica \overline{BC} , a najdulja \overline{AB} .

1 bod

Kako je stranica \overline{BC} dijagonala kvadrata $BFCD$ i kako je njezina duljina 1 cm, slijedi da je $|BD| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

1 bod

Trokut AEC je jednakostraničan, stranice duljine $2|CD| = \sqrt{2}$.

1 bod

Dužina \overline{AD} je visina jednakostraničnog trokuta AEC duljine stranice $\sqrt{2}$ te je

$$|AD| = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

1 bod

Stoga je duljina najdulje stranice $|AB| = |AD| + |DB| = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm.

1 bod

Zadatak B-1.6.

U nizu brojeva

20, 202, 2020, 20202, 202020, ...

svaki se sljedeći broj dobije dopisivanjem znamenke 2 ili 0 prethodnom broju, naizmjenice. Izračunajte zbroj znamenaka prvih sto brojeva toga niza koji su djeljivi s 202.

Rješenje.

Prvi broj u tom nizu koji je djeljiv s 202 ima na kraju znamenku 2. Kako se sljedeći broj u nizu dobije dodavanjem nule, odnosno množenjem s 10, to je i sljedeći broj djeljiv s 202. Dakle prvi par brojeva djeljiv s 202 je $a_2 = 202$, $a_3 = 202 \cdot 10$.

Dodavanje znamenke 2 znači prethodni broj množimo s 10 i dodajemo 2. Stoga slijedi da je

$$a_4 = a_3 \cdot 10 + 2 = 202 \cdot 100 + 2, \quad a_5 = a_4 \cdot 10 = 202 \cdot 1000 + 20.$$

a ovaj par brojeva očito nije djeljiv s 202.

2 boda

Na isti način dobivamo da je sljedeći par brojeva djeljiv s 202:

$$a_6 = a_5 \cdot 10 + 2 = 202 \cdot 10^4 + 200 + 2 = 202 \cdot 10^4 + 202 = 202(10^4 + 1)$$

$$a_7 = a_6 \cdot 10 = 202(10^4 + 1) \cdot 10.$$

Analognim zaključivanjem vidimo da i dalje naizmjenice dobivamo parove brojeva koji su djeljivi s 202 i koji nisu.

2 boda

Prvih 50 parova brojeva (prvih 100 brojeva) koji su djeljivi s 202 su

1. 202 i 2020
2. 2020202 i 20202020
3. 20202020202 i 202020202020

...

50. 2020...202 i 2020...2020

2 boda

Prvi par sadrži ukupno 4 znamenke 2, drugi ukupno 8, ..., pedeseti par 200 znamenki 2.

2 boda

Zbroj znamenaka ovih 100 brojeva iznosi

$$\begin{aligned} 4 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 12 \cdot 2 + \dots + 200 \cdot 2 &= 2(4 + 8 + 12 + \dots + 200) \\ &= 8(1 + 2 + 3 + \dots + 50) = 8 \cdot 50 \cdot 51/2 = 10200. \end{aligned}$$

2 boda

Napomena: Učenik mora argumentirati dobivenih 50 parova brojeva djeljivih s 202 i zašto ostali brojevi nisu djeljivi s 202. Ta argumentacija vrijedi **4 boda**.

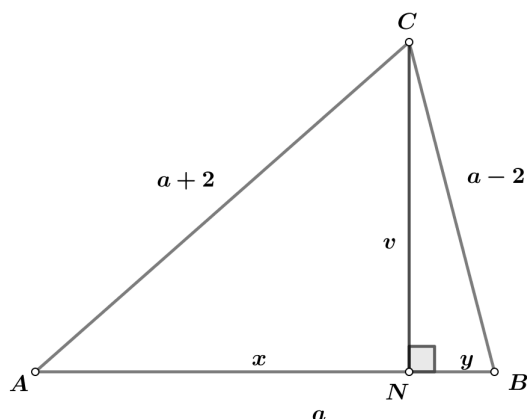
Zadatak B-1.7.

Duljine stranica šiljastokutnog trokuta su tri broja od kojih je najveći za četiri veći od najmanjeg, a srednji po veličini je aritmetička sredina preostala dva. Visina trokuta povučena na srednju stranicu po duljini dijeli trokut na dijelove čije su površine u omjeru 3 : 2. Odredite opseg zadanog trokuta.

Rješenje.

Neka su duljine stranica $a - 2$, a , $a + 2$.

1 bod



Iz omjera površina slijedi $\frac{xv/2}{yv/2} = \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, odnosno $x = \frac{3}{2}y$.

2 boda

Primijenimo Pitagorin poučak na pravokutne trokute ANC i NBC sa slike.

$$v^2 = (a + 2)^2 - x^2, \quad v^2 = (a - 2)^2 - y^2.$$

2 boda

Nakon izjednačavanja desnih strana dobivenu jednakost možemo pisati u obliku $(a + 2)^2 - (a - 2)^2 = x^2 - y^2$.

Slijedi $8a = (x - y)(x + y)$,

1 bod

a kako je $x + y = a$, dobivamo $8a = (x - y)a$,

pa je $x - y = 8$.

1 bod

Iz $x = \frac{3}{2}y$ i $x - y = 8$ slijedi $y = 16$, $x = 24$,

1 bod

$a = x + y = 40$.

1 bod

Opseg zadanog trokuta je $o = (a - 2) + a + (a + 2) = 3a = 120$.

1 bod

Napomena: Ako su stranice a , $a + 2$, $a + 4$ dobivamo:

$$v^2 = (a + 4)^2 - x^2 = a^2 - y^2$$

$$(a + 4)^2 - a^2 = x^2 - y^2$$

$$8a + 16 = (x - y)(x + y)$$

$$8(a + 2) = (x - y)(a + 2)$$

dakle $x - y = 8$ te dalje nastavljamo kao u gornjem rješenju.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak B-2.1.

Odredite najmanji i najveći cijeli broj x za koji je broj $x^4 - 2021x^2 + 2020$ negativan.

Rješenje.

Tražimo rješenja nejednadžbe $x^4 - 2021x^2 + 2020 < 0$.

Faktorizirajmo izraz na lijevoj strani.

$$x^4 - 2020x^2 - x^2 + 2020 < 0 \quad 1 \text{ bod}$$

$$x^2(x^2 - 2020) - (x^2 - 2020) < 0$$

$$(x^2 - 2020)(x^2 - 1) < 0 \quad 1 \text{ bod}$$

Odavde je $1 < x^2 < 2020$, pa slijedi $1 < |x| < \sqrt{2020}$, odnosno

$$x \in \langle -\sqrt{2020}, -1 \rangle \cup \langle 1, \sqrt{2020} \rangle. \quad 2 \text{ boda}$$

Kako je $44 = \sqrt{1936} < \sqrt{2020} < \sqrt{2025} = 45$, najmanji cijeli broj za koji je dani izraz negativan je broj -44 , a najveći 44 .

2 boda

Zadatak B-2.2.

Funkcija $f(x) = x^2 + px + q$ poprima negativne vrijednosti samo za $x \in \langle -3, 14 \rangle$.
Koliko cjelobrojnih vrijednosti iz skupa $[-100, -10]$ može poprimiti funkcija f ?

Rješenje.

Ako funkcija f poprima negativne vrijednosti samo na intervalu $\langle -3, 14 \rangle$, brojevi -3 i 14 su njezine nultočke.

1 bod

Tada je prema Vieteovim formulama

$$-3 + 14 = -p, \quad -3 \cdot 14 = q, \quad \text{odnosno} \quad p = -11, \quad q = -42, \quad 2 \text{ boda}$$

odnosno $f(x) = x^2 - 11x - 42$.

Minimalna vrijednost ove funkcije je

$$y_{\min} = f\left(\frac{-3 + 14}{2}\right) = -\frac{289}{4} = -72.25 \quad 1 \text{ bod}$$

pa je $f(x) \geq -72.25$ za sve realne brojeve x .

Stoga $f(x)$ može biti samo cijeli broj koji je veći ili jednak -72 ,

1 bod

a na intervalu $[-100, -10]$ funkcija f može poprimiti cjelobrojne vrijednosti iz skupa $\{-72, -71, -70, \dots, -11, -10\}$ kojih je 63.

1 bod

Zadatak B-2.3.

Do vrha stepeništa ima 8 stuba. Na koliko načina možemo stići na vrh ako se možemo penjati po jednu stubu ili po dvije stube?

Rješenje.

Na k -tu stubu ($k \geq 3$) možemo u jednome koraku doći sa $k - 1$. ili $k - 2$. stube.

1 bod

Znači da je broj načina da dođemo na k -tu stubu jednak zbroju brojeva načina za doći na $k - 1$. stubu i na $k - 2$. stubu.

2 boda

Na 1. stubu možemo doći na 1 način, a na 2. stubu na 2 načina.

1 bod

Dalje nastavljamo po principu zbroja:

na 3. stubu $1 + 2 = 3$ načina,

na 4. stubu $2 + 3 = 5$ načina,

na 5. stubu $3 + 5 = 8$ načina,

na 6. stubu 13 načina,

na 7. stubu 21 način,

na 8. stubu 34 načina.

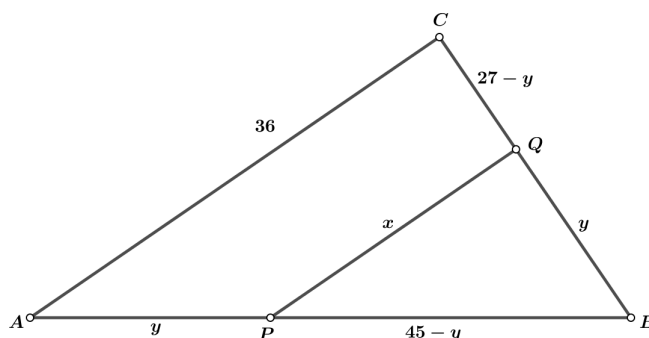
2 boda

Zadatak B-2.4.

Duljine stranica trokuta ABC su $|BC| = 27$, $|AC| = 36$, $|AB| = 45$. Neka su P i Q redom točke na stranicama \overline{AB} i \overline{BC} takve da je $|AP| = |BQ|$ i $AC \parallel PQ$. Izračunajte površinu trokuta PBQ .

Prvo rješenje.

Uz oznake kao na slici, $\angle BPQ = \angle BAC$ (kutovi s paralelnim krakima)
pa je $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$.



Tada je $45 : (45 - y) = 27 : y$, odnosno $y = \frac{27 \cdot 45}{27 + 45} = \frac{135}{8}$. 2 boda

Koeficijent sličnosti jednak je $k = \frac{y}{27} = \frac{5}{8}$. 1 bod

Vrijedi $P(\triangle PBQ) = k^2 P(\triangle ABC)$. 1 bod

Površinu trokuta ABC računamo po Heronovoj formuli:

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(27 + 36 + 45) = 54$$

$$P(\triangle ABC) = \sqrt{(s(s-a)(s-b)(s-c))} \\ = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 18 \cdot 9} = \sqrt{27 \cdot 2 \cdot 27 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 9} = 27 \cdot 2 \cdot 9 = 486, \quad 1 \text{ bod}$$

pa je konačno $P(\triangle PBQ) = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot 486 = \frac{6075}{32}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju uočavamo slične trokute, $\triangle ABC \sim \triangle PBQ$.

Uočimo i da je trokut ABC pravokutni trokut, a onda i trokut PBQ . 1 bod

Vrijedi da je $45 : (45 - y) = 27 : y$, odnosno $y = \frac{27 \cdot 45}{27 + 45} = \frac{135}{8}$. 2 boda

i $36 : x = 27 : y$, a odatle je $x = \frac{36y}{27} = \frac{45}{2}$. 1 bod

Vrijedi $P(\triangle PBQ) = k^2 P(\triangle ABC)$. 1 bod

Slijedi $P(\triangle PBQ) = \frac{xy}{2} = \frac{1}{2} \frac{135}{8} \cdot \frac{45}{2} = \frac{6075}{32}$. 1 bod

Zadatak B-2.5.

Ako je $x = 2017 \cdot 2018 \cdot 2021 \cdot 2022 + 4$, izračunajte $\sqrt{x} - 2020^2$.

Rješenje.

Uočimo da se svaki od brojeva 2017, 2018, 2021 i 2022 može zapisati koristeći broj $a = 2020$. Pišemo

$$x = (a - 3)(a - 2)(a + 1)(a + 2) + 4. \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je $-3a + 2a = -2a + 1a$, množenjem prve i zadnje zagrade, odnosno druge i treće zagrade dobivamo

$$x = (a^2 - a - 6)(a^2 - a - 2) + 4. \quad 2 \text{ boda}$$

Uvedimo supstituciju $t = a^2 - a - 4$

$$x = (t - 2)(t + 2) + 4 = t^2 - 4 + 4 = t^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Dobili smo

$$x = (2020^2 - 2020 - 4)^2 = (2020^2 - 2024)^2. \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je broj u zagradi pozitivan, vrijedi

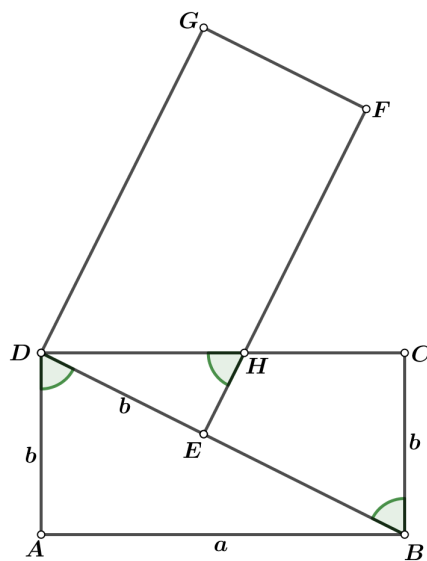
$$\sqrt{x} - 2020^2 = (2020^2 - 2024) - 2020^2 = -2024. \quad 1 \text{ bod}$$

Napomena: Ako se uvede supstitucija $t = a^2 - a$ imamo
 $x = (t - 6)(t - 2) + 4 = t^2 - 8t + 16 = (t - 4)^2$.

Zadatak B-2.6.

Pravokutnik $ABCD$, u kojem je $|AB| > |AD|$, zarotira se oko vrha D u pravokutnik $EFGD$ tako da se vrh A preslika u točku E na dijagonali \overline{BD} . Sjecište stranica \overline{DC} i \overline{EF} je točka H . Površina pravokutnika $ABCD$ odnosi se prema površini četverokuta $BCHE$ kao $5 : 2$. Ako je $\varphi = \angle ADB$, izračunajte $\frac{\sin^2 \varphi + 1}{\cos^2 \varphi + 1}$.

Rješenje.



Trokut DEH sličan je trokutu ABD po KK-teoremu o sličnosti.

2 boda

Iz $P_{ABCD} : P_{BCHE} = 5 : 2$ slijedi da je $P_{ABD} : P_{BCHE} = 5 : 4$,

1 bod

odnosno $\frac{P_{ABD}}{P_{DEH}} = 5 : 1 = k^2$.

2 boda

Dakle, koeficijent sličnosti je $k = \sqrt{5}$.

1 bod

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{\sqrt{5}}{1},$$

1 bod

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|AB|}{|AD|} = \sqrt{5}.$$

1 bod

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 \varphi + 1}{\cos^2 \varphi + 1} &= \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}{2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \varphi + 1}{2 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2 \cdot 5 + 1}{2 + 5} = \frac{11}{7}. \end{aligned}$$

2 boda

Zadatak B-2.7.

Luka je predložio Mili, Niki i Tini da zajedno rješavaju zadatke. Do tog je trenutka svaka od djevojaka već riješila određeni broj zadataka i to različitih u odnosu na ostale. Djevojke su odlučile prihvatiti Lukin prijedlog samo ako otkrije koliko je svaka od njih tri već riješila zadataka. Zbroj brojeva zadataka koje su Mila i Nika riješile i umnoška tih brojeva je 14. Za Milu i Tinu taj zbroj iznosi 11, a za Niku i Tinu 19. Koje brojeve Luka mora dobiti?

Prvo rješenje.

Neka je m broj zadataka koje je riješila Mila, n broj zadataka koje je riješila Nika i t broj zadataka koje je riješila Tina.

Luka treba riješiti sustav

$$m + n + mn = 14$$

$$m + t + mt = 11$$

$$n + t + nt = 19$$

2 boda

što se može zapisati u obliku

$$m + n + mn + 1 = 15$$

$$m + t + mt + 1 = 12$$

$$n + t + nt + 1 = 20$$

odnosno

$$(m + 1)(n + 1) = 15$$

$$(m + 1)(t + 1) = 12$$

$$(n + 1)(t + 1) = 20$$

2 boda

Iz prve dvije jednadžbe dobivamo $n + 1 = \frac{5}{4}(t + 1)$,

a kada to uvrstimo u treću $(t + 1)^2 = 16$.

2 boda

Dakle $t + 1 = 4$ ili $t + 1 = -4$

1 bod

no kako su m , n i t prirodni brojevi, $t + 1 = 4$, pa je $t = 3$.

1 bod

Tada iz $(n + 1)(t + 1) = 20$ slijedi $n = 4$, a iz $(m + 1)(t + 1) = 12$ je $m = 2$.

2 boda

Drugo rješenje.

Iz dvije jednadžbe sustava

$$m + n + mn = 14$$

$$m + t + mt = 11$$

$$n + t + nt = 19$$

2 boda

izrazimo nepoznanice, primjerice n i t

$$n = \frac{14 - m}{m + 1}, \quad t = \frac{11 - m}{m + 1}$$

2 boda

pa ih uvrstimo u treću jednadžbu

$$\frac{14-m}{m+1} + \frac{11-m}{m+1} + \frac{14-m}{m+1} \cdot \frac{11-m}{m+1} = 19. \quad 1 \text{ bod}$$

Slijedi niz ekvivalentnih jednadžbi, s nepoznanicom m , koje se svode na kvadratnu.

$$\begin{aligned}(25-2m)(m+1) + (14-m)(11-m) &= 19(m+1)^2 \\ 20m^2 + 40m - 160 &= 0 \\ m^2 + 2m - 8 &= 0\end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

Brojevi m , n i t su prirodni pa je jedino rješenje ove jednadžbe $m = 2$. 1 bod

Tada je $n = \frac{14-m}{m+1} = 4$ i $t = \frac{11-m}{m+1} = 3$. 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak B-3.1.

Za kompleksne brojeve z i w vrijedi $|z+w| = \sqrt{3}$ i $|z| = |w| = 1$. Izračunajte $|z-w|$.

Prvo rješenje.

Primijenimo svojstvo modula kompleksnog broja $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ na broj $z+w$:

$$|z+w|^2 = (z+w) \cdot \overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{w}. \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{Vrijedi } z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1, w \cdot \bar{w} = |w|^2 = 1 \text{ i } |z+w|^2 = 3, \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{pa je } 3 = 1 + w \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + 1, \text{ odnosno } w \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} = 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Tada je

$$\begin{aligned} |z-w|^2 &= (z-w) \cdot \overline{(z-w)} = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \\ &= z \cdot \bar{z} - w \cdot \bar{z} - z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{w} \\ &= |z|^2 - (w \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w}) + |w|^2 \\ &= 1 - 1 + 1 = 1. \end{aligned} \quad 2 \text{ boda}$$

$$\text{Stoga je } |z-w| = 1. \quad 1 \text{ bod}$$

Drugo rješenje.

$$\text{Neka su } a, b, c, d \text{ realni brojevi takvi da je } z = a + bi \text{ i } w = c + di. \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{Tada je } a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1. \quad 1 \text{ bod}$$

$$\text{Iz } |z+w| = |(a+c) + (b+d)i| = \sqrt{3} \text{ slijedi}$$

$$\begin{aligned} (a+c)^2 + (b+d)^2 &= 3 & 1 \text{ bod} \\ a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 &= 3 \\ (a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) + 2ac + 2bd &= 3 \\ 1 + 1 + 2ac + 2bd &= 3 \\ 2ac + 2bd &= 1 & 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

Sada možemo izračunati

$$\begin{aligned} |z-w| &= |(a+bi) - (c+di)| = |(a-c) + (b-d)i| & 1 \text{ bod} \\ &= \sqrt{a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) - (2ac + 2bd)} \\ &= \sqrt{1 + 1 - 1} = 1. & 1 \text{ bod} \end{aligned}$$

Zadatak B-3.2.

Riješite sustav jednačbi

$$\begin{aligned}y^{2020x} &= 10, \\ 6060x + 2\log y &= 7.\end{aligned}$$

Rješenje.

Logaritmiranjem prve jednačbe dobit ćemo $\log(y^{2020x}) = 1$, odnosno $2020x \log y = 1$ te $x = \frac{1}{2020 \log y}$. 1 bod

Ako to uvrstimo u drugu jednačbu slijedi $\frac{6060}{2020 \log y} + 2 \log y = 7$. 1 bod

Označimo $t = \log y$ i te dobivamo jednačbu $\frac{3}{t} + 2t = 7$, odnosno $2t^2 - 7t + 3 = 0$. 1 bod

Njena rješenja su $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = 3$ 1 bod

pa je $y_1 = \sqrt{10}$, $y_2 = 1000$ 1 bod

$x_1 = \frac{1}{1010}$, $x_2 = \frac{1}{6060}$. 1 bod

Rješenja su $(x, y) = (\frac{1}{1010}, \sqrt{10})$ i $(x, y) = (\frac{1}{6060}, 1000)$.

Zadatak B-3.3.

Riješite nejednačbu

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi x) - 1}{\operatorname{tg}(\pi x) + 1} > 1.$$

Prvo rješenje.

Zapišimo danu nejednačbu kao $\frac{\operatorname{tg}(\pi x) - 1}{\operatorname{tg}(\pi x) + 1} - 1 > 0$, te svedimo izraz na lijevoj strani na zajednički nazivnik

$$\frac{(\operatorname{tg}(\pi x) - 1) - (\operatorname{tg}(\pi x) + 1)}{\operatorname{tg}(\pi x) + 1} > 0 \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{-2}{\operatorname{tg}(\pi x) + 1} > 0 \quad 1 \text{ bod}$$

Slijedi $\operatorname{tg}(\pi x) + 1 < 0$, odnosno $\operatorname{tg}(\pi x) < -1$. 1 bod

Odavde je $-\frac{\pi}{2} + k\pi < \pi x < -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, 2 boda

odnosno $-\frac{1}{2} + k < x < -\frac{1}{4} + k$, $k \in \mathbb{Z}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Izraz na lijevoj strani dane nejednadžbe možemo transformirati:

$$\frac{\operatorname{tg}(\pi x) - 1}{\operatorname{tg}(\pi x) + 1} = \frac{\operatorname{tg}(\pi x) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}(\pi x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + 1} \quad 1 \text{ bod}$$

$$= \operatorname{tg} \left(\pi x - \frac{\pi}{4} \right) \quad 2 \text{ boda}$$

Slijedi rješavanje nejednadžbe $\operatorname{tg} \left(\pi x - \frac{\pi}{4} \right) > 1$.

$$\frac{\pi}{4} + k\pi < \pi x - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 2 \text{ boda}$$

a odavde je $\frac{1}{2} + k < x < \frac{3}{4} + k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad 1 \text{ bod}$

Zadatak B-3.4.

Tena i Ante igraju igru: prvo Tena kaže broj 0, pa Ante kaže broj za 1 veći. Zatim Tena kaže broj za 2 veći od Antinog, Ante kaže broj za 3 veći od Teninog ...

Igra završava kad netko kaže broj veći od 5050. Koji je to broj? Tko će pobijediti?

Rješenje.

Pogledajmo kako Tena i Ante formiraju brojeve:

Tena	Ante
0	$0 + \mathbf{1} = 1$
$1 + \mathbf{2} = 3$	$3 + \mathbf{3} = 6$
$6 + \mathbf{4} = 10$	$10 + \mathbf{5} = 15$
$15 + \mathbf{6} = 21$	$21 + \mathbf{7} = 28$
$28 + \mathbf{8} = 36$...

Brojeve smo dobili na sljedeći način:

$$0, \quad 0 + 1, \quad 0 + 1 + 2, \quad 0 + 1 + 2 + 3, \quad 0 + 1 + 2 + 3 + 4, \quad \dots$$

Dakle, u n -tom koraku bit će izgovoren broj $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1)$. 1 bod

Ovaj zbroj jednak je $\frac{(n - 1)n}{2}$ 1 bod

i treba vrijediti $\frac{(n - 1)n}{2} > 5050$ ili $(n - 1)n > 10100 = 100 \cdot 101$ 1 bod

tj. $n > 101$. Zato je $n = 102$ 1 bod

pa je pobijedio Ante (jer je 102 parni broj). 1 bod

Broj koji je on izgovorio je $\frac{102 \cdot 101}{2} = 5151$. 1 bod

Zadatak B-3.5.

Duljine dviju stranica trokuta su 7 cm i 4 cm. Kut nasuprot dulje stranice je dva puta veći od kuta nasuprot kraće stranice. Kolika je duljina treće stranice trokuta?

Rješenje.

Neka je $a = 4$, cm, $b = 7$, cm, $\beta = 2\alpha$.

Koristeći poučak o sinusima imamo $\frac{4}{\sin \alpha} = \frac{7}{\sin 2\alpha}$ 1 bod

iz čega dalje slijedi $4 \sin 2\alpha = 7 \sin \alpha$

odnosno $8 \sin \alpha \cos \alpha = 7 \sin \alpha$.

Sinus kuta u trokutu ne može biti jednak nuli, pa je $\cos \alpha = \frac{7}{8}$. 2 boda

Duljinu treće stranice c odredit ćemo pomoću poučka o kosinusu za stranicu a

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ 4^2 &= 7^2 + c^2 - 2 \cdot 7 \cdot c \cdot \frac{7}{8} \end{aligned} \quad \text{1 bod}$$

odakle dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$c^2 - 14c + 33 = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su $c = 4$ i $c = \frac{33}{4}$. 1 bod

Međutim, rješenje $c = 4$ treba odbaciti jer za trokut sa stranicama $a = c = 4$, $b = 7$ ne vrijedi $\beta = 2\alpha$. Naime, iz $a = c$ tj. $\alpha = \gamma$ i $\beta = 2\alpha$ slijedi $\alpha = \gamma = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$, što očito ne vrijedi u ovom trokutu. 1 bod

Duljina treće stranice trokuta iznosi $\frac{33}{4} = 8.25$ cm.

Zadatak B-3.6.

Odredite $\cos x$ ako je

$$\log_{27} \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = \frac{1}{3} + \log_3 (-\cos x).$$

Prvo rješenje.

Rješenje zadatka mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x > 0, \quad -\cos x > 0. \quad \text{1 bod}$$

Odatle je $2 \sin x \cos x - \frac{1}{3} \cos x > 0$, a kako je $\cos x$ negativan, dobivamo $2 \sin x - \frac{1}{3} < 0$.

Dakle, uvjeti se svode na $\sin x < \frac{1}{6}$, $\cos x < 0$. 1 bod

Logaritme u zadanoj jednakosti prebacimo u bazu 3, a zatim se riješimo logaritama:

$$\frac{1}{3} \log_3 \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x) \quad 1 \text{ bod}$$

$$\log_3 \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = 1 + 3 \log_3(-\cos x)$$

$$\log_3 \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = \log_3 3 + \log_3(-\cos x)^3$$

$$\log_3 \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = \log_3(-3 \cos^3 x) \quad 2 \text{ boda}$$

$$\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x = -3 \cos^3 x \quad 1 \text{ bod}$$

$$2 \sin x \cos x - \frac{1}{3} \cos x = -3 \cos^3 x$$

Sada podijelimo s $\cos x$ ($\cos x \neq 0$)

$$2 \sin x - \frac{1}{3} = -3 \cos^2 x$$

$$2 \sin x - \frac{1}{3} = -3(1 - \sin^2 x) \quad 1 \text{ bod}$$

$$3 \sin^2 x - 2 \sin x - \frac{8}{3} = 0$$

Ovo je kvadratna jednadžba po $\sin x$ s rješenjima $-\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{3}$. 1 bod

Jedino rješenje je $\sin x = -\frac{2}{3}$ 1 bod

a zbog uvjeta je $\cos x = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Rješenje zadatka mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

$$\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x > 0, \quad -\cos x > 0. \quad 1 \text{ bod}$$

Odatle je $2 \sin x \cos x - \frac{1}{3} \cos x > 0$, a kako je $\cos x$ negativan, dobivamo $2 \sin x - \frac{1}{3} < 0$.

Dakle, uvjeti se svode na $\sin x < \frac{1}{6}$, $\cos x < 0$. 1 bod

Logaritme u zadanoj jednakosti prebacimo u bazu 3.

$$\frac{1}{3} \log_3 \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = \frac{1}{3} + \log_3(-\cos x). \quad 1 \text{ bod}$$

Slijedi

$$\log_3 \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) = 1 + 3 \log_3(-\cos x)$$

$$\log_3 \left(\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x \right) - \log_3(-\cos x)^3 = 1$$

$$\log_3 \frac{\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x}{(-\cos x)^3} = 1 \quad 2 \text{ boda}$$

$$\frac{\sin 2x - \frac{1}{3} \cos x}{(-\cos x)^3} = 3 \quad 1 \text{ bod}$$

$$\frac{2 \sin x \cos x - \frac{1}{3} \cos x}{-\cos^3 x} = 3$$

Kako je $\cos x \neq 0$, slijedi

$$2 \sin x \cos x - \frac{1}{3} \cos x = -3 \cos^3 x$$

$$2 \sin x - \frac{1}{3} = -3 \cos^2 x$$

$$2 \sin x - \frac{1}{3} = -3(1 - \sin^2 x) \quad 1 \text{ bod}$$

$$3 \sin^2 x - 2 \sin x - \frac{8}{3} = 0$$

Ovo je kvadratna jednadžba po $\sin x$ s rješenjima $-\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{3}$. 1 bod

Jedino rješenje je $\sin x = -\frac{2}{3}$ 1 bod

a zbog uvjeta je $\cos x = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. 1 bod

Zadatak B-3.7.

Dječje igralište ima oblik trokuta čiji je opseg 36 m, a površina $30\sqrt{3} \text{ m}^2$. Ako je mjera jednog kuta 60° , odredite duljine stranica tog igrališta.

Prvo rješenje.

Neka su duljine stranica trokuta a , b i c , a dani kut od 60° zatvaraju stranice s duljinama a i b .

Iz formule za površinu trokuta slijedi $P = \frac{1}{2}ab \sin 60^\circ = 30\sqrt{3}$ slijedi $ab = 120$. 1 bod

Iz podatka o opsegu dobivamo $o = a + b + c = 36$. 1 bod

Koristimo poučak o kosinusu za stranicu c .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab. \quad 1 \text{ bod}$$

Kvadriranjem jednakosti $c = 36 - (a + b)$ dobivamo

$$c^2 = 36^2 - 72(a + b) + (a + b)^2 \quad 1 \text{ bod}$$

pa je

$$a^2 + b^2 - ab = 36^2 - 72(a + b) + (a^2 + 2ab + b^2)$$

odnosno $36^2 - 72(a + b) + 3ab = 0$. 1 bod

Kako je $ab = 120$, dobivamo

$$36^2 - 72(a + b) + 360 = 0$$

pa slijedi $a + b = 23$. Dakle $c = 36 - 23 = 13$. 1 bod

Iz $ab = 120$ i $a + b = 23$ slijedi da su, prema Vieteovim formulama, a i b rješenja kvadratne jednadžbe $x^2 - 23x + 120 = 0$. 2 boda

To su $a = 15$ i $b = 8$ (ili obratno). 2 boda

Stranice igrališta dugačke su 8 m, 13 m i 15 m.

Drugo rješenje.

Neka su duljine stranica trokuta a , b i c , a dani kut od 60° zatvaraju stranice s duljinama a i b .

Iz formule za površinu trokuta slijedi $P = \frac{1}{2}ab \sin 60^\circ = 30\sqrt{3}$ slijedi $ab = 120$. 1 bod

Iz podatka o opsegu dobivamo $o = a + b + c = 36$. 1 bod

Koristimo poučak o kosinusu za stranicu c .

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ = a^2 + b^2 - ab = (a + b)^2 - 3ab \quad 1 \text{ bod}$$

Kako je $ab = 120$, a $a + b = 36 - c$, dobivamo

$$c^2 = (36 - c)^2 - 360 \quad 2 \text{ boda}$$

odakle slijedi $c = 13$. 1 bod

Potrebno je još izračunati a i b .

Vrijedi $a + b = 36 - c = 36 - 13 = 23$ pa jednakost $ab = 120$ vodi na $(23 - b)b = 120$ odnosno na kvadratnu jednadžbu $b^2 - 23b + 120 = 0$ 2 boda

čija su rješenja $a = 15$ i $b = 8$ (ili obratno). 2 boda

Stranice igrališta dugačke su 8 m, 13 m i 15 m.

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

4. ožujka 2020.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I Taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak B-4.1.

Riješite nejednadžbu $3^{3x} + 3^4 \leq 3^{2x+2} + 3^{x+2}$.

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $t = 3^x$. Tada danu nejednadžbu možemo zapisati kao

$$t^3 - 9t^2 - 9t + 81 \leq 0.$$

Ako iz prvog i trećeg pribrojnika izlučimo t , a iz drugog i četvrtog 9 redom slijedi:

$$t(t^2 - 9) - 9(t^2 - 9) \leq 0 \quad 1 \text{ bod}$$

$$(t - 9)(t^2 - 9) \leq 0$$

$$(t - 9)(t - 3)(t + 3) \leq 0 \quad 2 \text{ boda}$$

Kako je $t + 3$ uvijek pozitivno, slijedi $(t - 9)(t - 3) \leq 0$.

Rješenje ove nejednadžbe je $t \in [3, 9]$ 2 boda

pa je rješenje dane nejednadžbe $x \in [1, 2]$. 1 bod

Zadatak B-4.2.

Pravci s jednadžbama $y = k_1x + 2$ i $y = k_2x - 3$ su tangente parabole s jednadžbom $y^2 = 2px$, $p > 0$, a zatvaraju kut od 45° . Odredite jednadžbe svih takvih parabola.

Prvo rješenje.

S obzirom da je kut između dva pravca 45° slijedi $\left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} \right| = 1$ odnosno $|k_2 - k_1| = |1 + k_1k_2|$.

Iz uvjeta dodira $p = 2kl$ slijedi $4k_1 = -6k_2$ tj. $k_1 = -\frac{3}{2}k_2$. 1 bod

Slijedi $|k_2 + \frac{3}{2}k_2| = |1 - \frac{3}{2}k_2 \cdot k_2|$ t.j. $\left| \frac{5}{2}k_2 \right| = \left| 1 - \frac{3}{2}k_2^2 \right|$. 1 bod

Imamo dva slučaja

$$\frac{5}{2}k_2 = 1 - \frac{3}{2}k_2^2 \quad \text{ i } \quad -\frac{5}{2}k_2 = 1 - \frac{3}{2}k_2^2.$$

Stoga postoje 4 rješenja.

$$\begin{array}{cccc} k_1 = -\frac{1}{2} & k_1 = 3 & k_1 = \frac{1}{2} & k_1 = -3 \\ k_2 = \frac{1}{3} & k_2 = -2 & k_2 = -\frac{1}{3} & k_2 = 2. \end{array} \quad 2 \text{ boda}$$

Odgovarajući parametri su

$$p = -2 \quad p = 12 \quad p = 2 \quad p = -12.$$

Zbog uvjeta $p > 0$ rješenje zadatka su $y^2 = 4x$ i $y^2 = 24x$. 2 boda

Napomena: Nije nužno da učenik odredi oba koeficijenta k_1 i k_2 . Dovoljno je da izračuna parametar p pomoću jednog od tih koeficijenata.

Drugo rješenje.

Iz uvjeta dodira je $p = 2k_1 \cdot 2 = 4k_1$ pa je $k_1 = \frac{p}{4}$ 1 bod

i analogno $p = 2k_2 \cdot (-3) = -6k_2$ pa je $k_2 = -\frac{p}{6}$. 1 bod

Sada je $\left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right| = 1$ odnosno $|k_2 - k_1| = |1 + k_2 k_1|$

pa redom slijedi

$$\begin{aligned} \frac{p}{4} + \frac{p}{6} &= \left| 1 - \frac{p^2}{24} \right| \\ \frac{5p}{12} &= \frac{|24 - p^2|}{24}. \end{aligned}$$

Pomnožimo gornju jednakost s 24 i razdvojimo na dva slučaja.

Prvi slučaj je $10p = 24 - p^2$. 1 bod

Pozitivno rješenje jednadžbe $p^2 + 10p - 24 = 0$ je $p = 2$
pa tražena parabola ima jednadžbu $y^2 = 4x$. 1 bod

Drugi slučaj je $-10p = 24 - p^2$. 1 bod

Pozitivno rješenje jednadžbe $p^2 - 10p - 24 = 0$ je $p = 12$
pa tražena parabola ima jednadžbu $y^2 = 24x$. 1 bod

Zadatak B-4.3.

Ako je $26! = 403\,291\,x61\,126\,605\,635\,58x\,y00\,000$, odredite znamenke x i y .

Rješenje.

Utvrđimo najprije s koliko nula završava broj $26!$. Treba odrediti potenciju broja 5 u rastavu tog broja na proste faktore (jer se faktor 2 javlja više puta). 1 bod

Kako je $26! = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, broj 5 se pojavljuje kao faktor brojeva 5, 10, 15, 20 i 25. Uočimo još da je $25 = 5^2$ pa je najveća potencija broja 5 u rastavu broja $26!$ jednaka 5^6 . 1 bod

Broj $26!$ završava sa 6 nula. Dakle, $y = 0$. 1 bod

Odredimo vrijednost znamenke x . Dani broj mora biti djeljiv s 9 pa je i zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 9. 1 bod

Zbroj znamenaka danog broja je

$$4 + 0 + 3 + 2 + 9 + 1 + x + 6 + 1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 0 + 5 + 6 + 3 + 5 + 5 + 8 + x = 73 + 2x. \quad \text{1 bod}$$

Da bi broj $73 + 2x = 8 \cdot 9 + 1 + 2x$ bio djeljiv s 9, mora $1 + 2x$ biti djeljivo s 9, a to je moguće jedino ako je $2x = 8$, odnosno $x = 4$. 1 bod

Tražene znamenke su $x = 4$ i $y = 0$.

Zadatak B-4.4.

Za svaki prirodni broj n , zbroj prvih n članova nekog niza je $S_n = 2.5n^2 - 4.5n$.

Koji članovi tog niza poprimaju vrijednosti između 10 085 i 10 095?

Rješenje.

Opći član niza možemo izračunati na sljedeći način

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} && \text{1 bod} \\ &= (2.5n^2 - 4.5n) - (2.5(n-1)^2 - 4.5(n-1)) \\ &= 5n - 7 && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Odredimo n iz uvjeta $10\,085 < a_n < 10\,095$. 1 bod

$$\begin{aligned} 10\,085 &< 5n - 7 < 10\,095 \\ 10\,092 &< 5n < 10\,102 \\ 2018.4 &< n < 2020.4 && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Jedini prirodni brojevi u tom intervalu su

$$n = 2019 \quad \text{i} \quad n = 2020 \quad \text{1 bod}$$

pa su traženi članovi $a_{2019} = 5 \cdot 2019 - 7 = 10\,088$ i $a_{2020} = 5 \cdot 2020 - 7 = 10\,093$. 1 bod

Zadatak B-4.5.

Dana su tri paralelna pravca a , b i c . Na pravcu a istaknute su točke A , B i C , na pravcu b točke D , E , F i G , a na pravcu c točke H , I , J , K i L . Koliko je najviše trokuta određeno točkama iz skupa $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}$?

Prvo rješenje.

Razlikujemo četiri slučaja:

Prvi slučaj. Na svakom od pravaca a , b i c nalazi se po jedan vrh trokuta. S obzirom da tražimo najveći mogući broj trokuta, pretpostavljamo da odabrane trojke točaka nisu kolinearne. Vrh koji je na pravcu a biramo na tri načina, vrh na pravcu b na četiri načina, a vrh na pravcu c na pet načina. Ukupno postoji $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ takvih trokuta. 1 bod

Drugi slučaj. Dva vrha trokuta su na pravcu a , a treći vrh na jednom od ostala dva pravca. Takvih trokuta ima $\binom{3}{2} \cdot (4 + 5) = 27$. 1 bod

Treći slučaj. Dva vrha su na pravcu b , a treći vrh na jednom od ostala dva pravca. Takvih trokuta ima $\binom{4}{2} \cdot (3 + 5) = 48$. 1 bod

Četvrti slučaj. Dva vrha su na pravcu c , a treći vrh na jednom od ostala dva pravca. Takvih trokuta ima $\binom{5}{2} \cdot (3 + 4) = 70$. 1 bod

Konačno, postoji najviše $60 + 27 + 48 + 70 = 205$ takvih trokuta. 2 boda

Drugo rješenje.

Od danih 12 točaka tri točke možemo odabrati na $\binom{12}{3} = 220$ načina. 2 boda

Od tog broja treba oduzeti broj načina za odabir tri točke na istom pravcu (a , b ili c).

Traženi broj je $\binom{12}{3} - \left(\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} \right) = 220 - (1 + 4 + 10) = 205$. 4 boda

Zadatak B-4.6.

Odredite površinu skupa svih točaka pridruženih kompleksnim brojevima z za koje vrijedi

$$|z| \leq \left| \frac{1}{z} \right| \quad \text{i} \quad \frac{28277\pi}{12} \leq \arg \left(\frac{z^{2020}}{1+i} \right) \leq \frac{40397\pi}{12}.$$

Rješenje.

Nekja je $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ trigonometrijski oblik kompleksnog broja z .

Iz $|z| \leq \left| \frac{1}{z} \right|$ slijedi $|z|^2 \leq 1$ pa je $r \leq 1$. 2 boda

Vrijedi

$$\arg \left(\frac{z^{2020}}{1+i} \right) = \arg \frac{r^{2020}(\cos 2020\varphi + i \sin 2020\varphi)}{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \quad \text{2 boda}$$

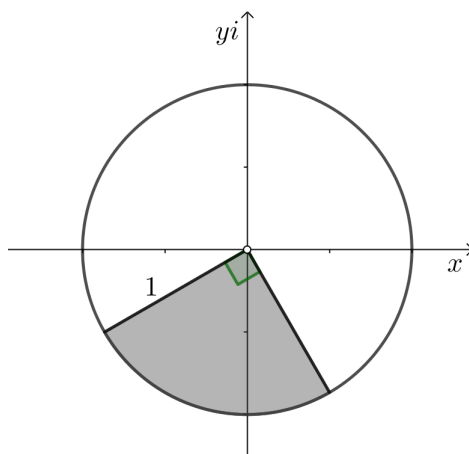
$$= \arg \left[\frac{r^{2020}}{\sqrt{2}} \left(\cos(2020\varphi - \frac{\pi}{4}) + i \sin(2020\varphi - \frac{\pi}{4}) \right) \right]$$

$$= 2020\varphi - \frac{\pi}{4} \quad \text{2 boda}$$

Zato iz dane nejednakosti slijedi

$$\frac{28277\pi}{12} \leq 2020\varphi - \frac{\pi}{4} \leq \frac{40397\pi}{12},$$

odnosno $\frac{7\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}$. 1 bod



1 bod

Zadani skup točaka je kružni isječak polumjera 1 i središnjeg kuta $\frac{5\pi}{3} - \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$.

Površina je $P = \frac{1}{4}r^2\pi = \frac{\pi}{4}$. 2 boda

Zadatak B-4.7.

Riješite nejednadžbu

$$\log_{\sqrt{5}}(3^{x^2-x-1} + 2) + \log_5(3^{x^2-x-1} + 2) + \log_{25}(3^{x^2-x-1} + 2) + \\ \log_{625}(3^{x^2-x-1} + 2) + \dots + \log_{5^{2^k}}(3^{x^2-x-1} + 2) + \dots \leq 4.$$

Rješenje.

Označimo $3^{x^2-x-1} + 2 = y$.

Dana nejednadžba redom je ekvivalentna s

$$\log_{\sqrt{5}} y + \log_5 y + \log_{25} y + \log_{625} y + \dots + \log_{5^{2^k}} y + \dots \leq 4$$

$$2 \log_5 y + \log_5 y + \frac{1}{2} \log_5 y + \frac{1}{4} \log_5 y + \dots + \frac{1}{2^k} \log_5 y + \dots \leq 4,$$

$$\left(2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots\right) \log_5 y \leq 4. \quad 2 \text{ boda}$$

Izraz u zagradi je geometrijski red s prvim članom 2 i količnikom $\frac{1}{2}$ 1 bod

pa je njegov zbroj jednak $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^k} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4$. 2 boda

Slijedi $4 \log_5 y \leq 4$, odnosno $\log_5(3^{x^2-x-1} + 2) \leq 1$ 1 bod

pa dalje imamo

$$0 < 3^{x^2-x-1} + 2 \leq 5 \quad 1 \text{ bod}$$

$$3^{x^2-x-1} \leq 3$$

$$x^2 - x - 1 \leq 1 \quad 1 \text{ bod}$$

$$(x - 2)(x + 1) \leq 0$$

Konačno rješenje je $x \in [-1, 2]$. 2 boda